Eesti koolinoorte 47. täppisteaduste olümpiaad

Füüsika lõppvoor. 12. märts 2000. a.

Keskkooli ülesannete lahendused

1. ülesanne

Veepind kaldub nii, et ta oleks risti raskusjõu ja inertsijõu resultandiga. Seega on ta horisondi suhtes nurga $\arctan(a/g)$ all. Rõhu avaldises $p = \rho\tilde{g}h$ seisab massiühiku kohta tuleva raskusjõu ja inertsijõu resultantvektori moodul,

$$\tilde{g} = \sqrt{g^2 + a^2}.$$

2. ülesanne

Selleks, et kuulike hakkaks põhja vajuma, pole vaja, et sulaks kogu jäätükk. Piisab sellest, et jää ja kuuli süsteemi keskmine tihedus muutub võrdseks vee tihedusega. Kui allesjäänud jää massi tähistada M_1, siis kuulikese põhja vajumise tingimuseks tuleb

$$\frac{M_1 + m}{V} = \rho_v.$$

Jää ja kuulikese summaarne ruumala on

$$V = \frac{M_1}{\rho} + \frac{m}{\rho_k}.$$

Seepärast

$$M_1 + m = \rho_v \cdot \left(\frac{M_1}{\rho} + \frac{m}{\rho_k}\right) = 8{,}2m.$$

Siit

$$M_1 = m \cdot \frac{(\rho_k - \rho_v) \cdot \rho}{(\rho_v - \rho) \cdot \rho_k}.$$

Ära sulanud mass on $M - M_1$; selle sulamiseks vajalik soojus

$$Q = \lambda \cdot (M_1 - M) = 19{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{J}.$$

3. ülesanne

a) Poiss peab ujuma risti vooluga. See annab poisi liikumise suunanurga määramiseks tingimuse $\tan\alpha = 1/2$, millest $\alpha = 26{,}6°$.

b) Seda osa võib lahendada kahel viisil.

Esimene lahendus.

Oletame, et poiss hakkab ületama jõge mingi nurga α all.

Siis jõuab ta vastaskaldale aja

$$t = \frac{d}{v \sin\alpha}$$

pärast, kus d on jõe laius ja v on poisi kiirus (vee suhtes). Selle aja jooksul viib jõgi poisi edasi kauguse

$$L = (u - v\cos\alpha) \cdot t$$

võrra (miinusmärk tuleneb sellest, et poiss ujub osaliselt vastuvoolu). Asendades t ja arvestades, et $u = 2v$, saame

$$L = d \cdot \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Selleks, et leida minimaalset võimaliku L väärtus, peame võtma saadud avaldisest tuletise α järgi:

$$\frac{dL}{d\alpha} = d \cdot \left(\frac{0 + \sin\alpha}{\sin\alpha} - (2 - \cos\alpha) \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \right).$$

Ekstremaalse L väärtuse puhul võrdub avaldis sulgudes nulliga, järelikult

$$(2 - \cos\alpha) \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 1,$$

$$2\cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\cos\alpha = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos(1/2) = 60°.$$

Nurga γ leiame võrrandite süsteemist

$$v \sin\alpha = w \sin\gamma, \quad v \cos\alpha + w \cos\gamma = u = 2v.$$

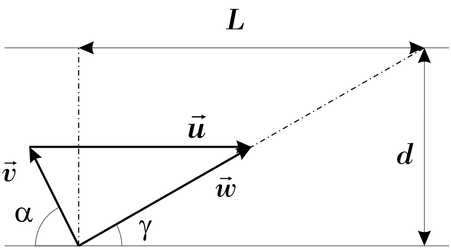
Teisest võrrandist saame

$$w \cos\gamma = v \cdot (2 - \cos\alpha).$$

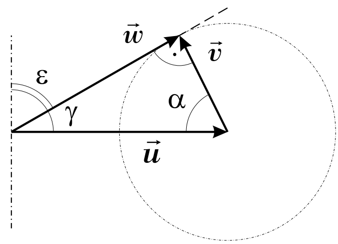
Jagame nüüd süsteemi esimese võrrandi saadud valemiga

$$\tan\gamma = \frac{v \sin\alpha}{v \cdot (2 - \cos\alpha)} = \frac{\sin 60^\circ}{2 - \cos 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

kust $\gamma = 30^\circ$.



Joonis 1: vt. ül. 3



Joonis 2: vt. ül. 3

Teine lahendus

Vaatleme kahe vektori summat: esimene on vee voolukiirus $\vec{u}$, mis on konstantne vektor, teine on poisi kiirusvektor vee suhtes $\vec{v}$ — selle moodul on fikseeritud, kuid suunda annab muuta.

Paneme teise alguspunkti esimese lõppunkti ja keerame teist vektorit ümber alguspunkti. Tema otspunkti geomeetriline koht on ring; seesama ring on ka summa vektori otspunkti geomeetriliseks kohaks (vt. joon. 2).

Väikseim nurk ε jõe ristsihi ja summa vektori $\vec{w}$ vahel on siis, kui summa vektor $\vec{w}$ on ringi puutujaks. See tähendab, et vektorite kolmnurk on täisnurkne. Nurk γ summarse kiirusvektori $\vec{w}$ ja jõe voolu kiirusvektori $\vec{u}$ vahel on määratav seosest $\sin\gamma = v/u = 1/2$, millest $\gamma = 30°$.

4. ülesanne

Mulli ruumala sõltuvus temperatuurist:

$$w = w_0 - V\alpha \cdot (T - T_0).$$

Teisest küljest

$$\frac{pw}{T} = \frac{p_0 w_0}{T_0}.$$

Seega

$$p = p_0 \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \frac{w_0}{w_0 - V\alpha \cdot (T - T_0)}.$$

Kui, vaadeldav temperatuurivahemik on väike, siis võime lugeda $T/T_0 \approx 1$ ja seega

$$p \approx p_0 \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_1 - T},$$

kus

$$T_1 = T_0 + \frac{w_0}{V\alpha} \approx 22°\text{C}.$$

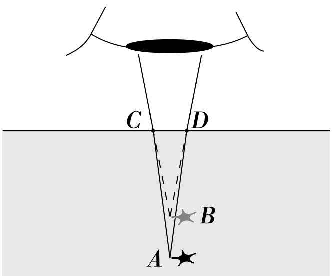
Lähenedes temperatuurile T_1 toimub rõhu plahvatuslik kasv; valem kaotab kehtivuse, kuna väga suure rõhu tõttu tuleb arvestada juba glütseriini kokkusurutavust ja seinte elastsust.

5. ülesanne

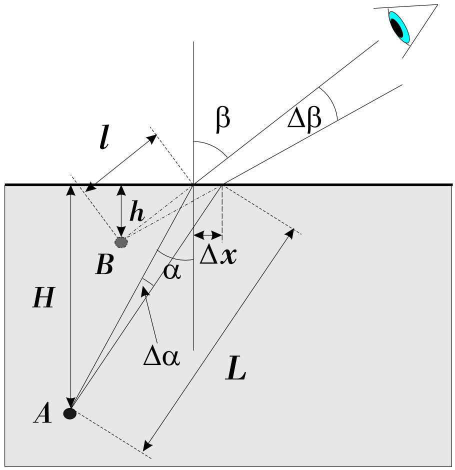
Eseme tõelisest asukohast A pärinevad valguskiired murduvad vedeliku pinnal nõnda, et nende pikendused koonduvad mingis punktis B, s.t. punktis B asub eseme näiv kujutis.

a) Vaatleme kahte punktist A väljuvat kiirt, mis moodustavad veepinnaga võrdkülgse kolmnurga (vt. joon. 3). Tähistame $\angle CAD = 2\alpha$ ja $\angle CBD = 2\beta$. Murdumisseaduse põhjal

$$\sin\beta = n \sin\alpha.$$



Joonis 3: vt. ül. 5



Joonis 4: vt. ül. 5

Et nurgad β ja α on väikesed, siis võime kasutada ligikaudset valemit

$$\sin x \approx \tan x \approx x.$$

Jooniselt on näha, et tegelik ja näiva sügavus avalduvad kujul

$$h \approx \frac{|CD|}{2\alpha}, \quad h' \approx \frac{|CD|}{2\beta}.$$

Järelikult $h/h' = n$. Seega $h' = 13{,}3$ cm.

b) Vaatleme kahte punktist A väljuvat kiirt, millest üks tuleb otse silma, teine aga on selle suhtes väikese nurga all kaldu.

Joonisel 4 toodud konstruktsiooni põhjal võime kirjutada:

$$\sin\beta = n\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\beta d\beta = n\cos\alpha d\alpha,$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = n \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta},$$

$$\Delta x \approx \frac{L\Delta\alpha}{\cos\alpha} \approx \frac{l\Delta\beta}{\cos\beta}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = n \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2$$

$$H = L\cos\alpha, \quad h = l\cos\beta$$

$$\frac{H}{h} = \frac{L}{l}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = n \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^3$$

Antud juhul

$$\beta = 90^\circ - \varphi = 50^\circ$$

ja

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin\beta}{n}\right) = 35^\circ.$$

Seega $H = 2{,}75h \approx 28$ cm.

6. ülesanne

Lambi võimsus ja takistus nimipingel avalduvad $P = UI = 3{,}12$ W, $R = U/I = 217\ \Omega$. Eelduse kohaselt $R/R_0 = T/T_0$, kus $T_0 \approx 293$ K on toatemperatuur. Seega $T = T_0R/R_0 = 2650$ K. Kuna praktiliselt kogu energia läheb kiirguseks, siis $P = SA\sigma T^4$, kus S on hõõgniidi pindala. $S = P/A\sigma T^4 = 2{,}23 \cdot 10^{-6}$ m^2. Nüüd saame hõõgniidi mõõtmete määramiseks järgmise süsteemi:

$$S = \pi dl, \quad R_0 = \rho_0 \cdot \frac{4l}{\pi d^2}.$$

Jagame esimese võrrandi teisega ja avaldame d

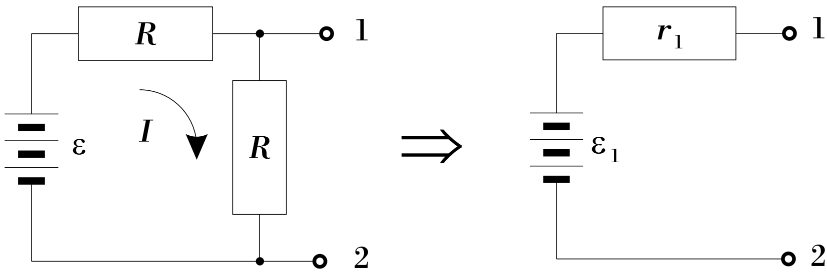
$$d = \sqrt[3]{\frac{4S\rho_0}{\pi^2 R_0}} \approx 5{,}8\ \mu\text{m},$$

$$l = \frac{S}{\pi d} \approx 12 \text{ cm}.$$

7. ülesanne

Esimene lahendus

Lihtsaim viis sedasorti ülesannete lahendamiseks on taandada nad mingile lihtsamale ekvivalentskeemile. Vaatleme skeemi vasakut osa, mis koosneb ideaalsest vooluallikast, mille sisetakistus on null, ning kahest takistist võrdsete takistustega:

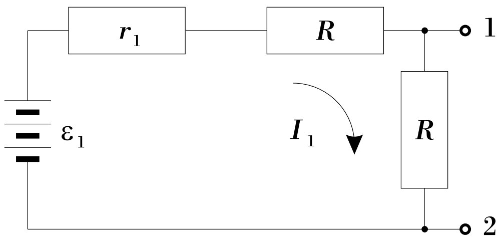


Joonis 5: vt. ül. 7

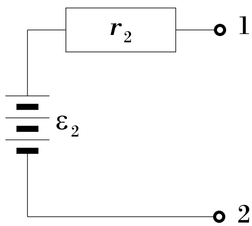
Seda skeemiosa võib vaadelda teatava mitteideaalse vooluallikana. Vooluallika klemmidel avaldub elektromotoorjõud teatavasti siis, kui välisahela takistus on lõpmata suur. Seega ekvivalentahela elektromotoorjõud

$$\varepsilon_1 = U_{12} = IR = \frac{\varepsilon}{R+R} \cdot R = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kui lühistada vooluallika klemmid, siis tekib vool $I = \varepsilon_1/r_1$, kus r_1 on otsitav Sisetakistuse. Teiselt poolt, $I = \varepsilon/R$, millest $r_1 = R\varepsilon_1/\varepsilon = R/2$. Meie esialgne skeem võtab nüüd järgmise kuju:



Joonis 6: vt. ül. 7



Joonis 7: vt. ül. 7

Korrates ülaltoodud võtet, saame uue ekvivalentskeemi elektromotoojõuga

$$\varepsilon_2 = U_{12} = I_1 R = \frac{\varepsilon_1}{r_1 + R + R} \cdot R = \frac{\varepsilon}{5}.$$

ja sisetakistusega

$$r_2 = \frac{R \cdot (r_1 + R)}{R + r_1 + R} = \frac{3R}{5}$$

a) Kui koormuse takistus on R_k, eraldub temal võimsus

$$P = I_2^2 R_k = \left(\frac{\varepsilon_2}{r_2 + R_k}\right)^2 \cdot R_k,$$

$$P = \frac{\varepsilon^2 R_k}{25 \cdot (3R/5 + R_k)^2} = \frac{\varepsilon^2 R_k}{(3R + 5R_k)^2}.$$

b) Suurimat võimsust saadakse vooluallikast teatavasti siis, kui välisahela takistus on võrdne vooluallika sisetakistusega. Seega antud juhul

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_2^2}{2r_2} = \frac{\varepsilon^2}{60R}.$$

Teine lahendus

Vooluallika külge ühendatud takistite süsteem kujutab endast takistite paralleel- ja järjestikühenduste kombinatsiooni. Summaarne takistus on lihtsalt leitav: tähistades $R_k/R = x$ saame

$$R_\Sigma = R \cdot \frac{5x + 3}{3x + 2}.$$

Seega voolutugevus läbi vooluallika on

$$I_\Sigma = \frac{\varepsilon \cdot (3x + 2)}{R \cdot (5x + 3)}.$$

Esimeses sõlmpunktis suundub sellest koormuse poole vool

$$I = I_\Sigma \cdot \frac{R}{R + R_1},$$

kus

$$R_1 = R \cdot \frac{2x+1}{x+1}$$

on koormise ja kahe lisatakisti R summarne takistus. Niisiis

$$I = \frac{\varepsilon \cdot (x+1)}{R \cdot (5x+3)}.$$

See vool jaguneb omakorda, nii et koormisele minev vool on

$$I_k = I_1 \cdot \frac{R}{R+R_k}.$$

Tehes asenduse leiame

$$I_k = \frac{\varepsilon}{R \cdot (5x+3)}.$$

Eralduv võimsus

$$P = R_k I_k^2 = \frac{\varepsilon^2 x}{R \cdot (5x+3)^2}.$$

See avaldis ongi vastuseks esimese alapunkti küsimusele. Tema maksimum x-i järgi on siis, kui avaldis

$$y = \frac{(5x+3)^2}{x} = 25x + 30 + \frac{9}{x}$$

on minimaalne. Võttes tuletise leiame: $x_{opt} = 3/5$. Asendades leitud väärtuse võimsuse avaldisse saame $P_{\max} = \varepsilon^2/(60R)$.

8. ülesanne

Olgu nurk koordinaatide alguspunktiks, x-telg horisontaalne ja y-telg — vertikaalne. Vaatleme jõumomente punkti $P = (b, a)$ suhtes. Ainult raskusjõu ja tasakaalustava jõu õlad ongi nullist erinevad. Raskusjõu moment on $mgb/2$. Jõud on minimaalne, kui õlg on maksimaalne, seega $h = \max(a, b)$. Niisiis

$$F = \frac{mgb}{2\max(a, b)}.$$

Rakenduspunkt on kas varda ülemine või alumine ots, vastavalt sellele, kumb on suurem, kas a või b; suund on vastavalt kas vertikaalne või horisontaalne.

9. ülesanne

a) Tsentraalne põrge

Vaadeldes põrget masskeskme süsteemis, näeme, et kuulid eemalduvad pärast põrget samasuguste kiirustega, nagu nad enne lähenesid. See tähendab, et laboratoorses süsteemis kuul, mis liikus, jääb paigale ja kuul, mis oli paigal, omandab kiiruse v. Seega $l = vt$.

b) Mittetsentraalne põrge

Impulsi jäävuse seadus: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_0$, kus $\vec{v}_0$ on esimese kuuli kiirusvektor enne põrget ning $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ on kiirused peale põrget. Seega moodustavad need kolm kiirusvektorit kolmnurga. Energia jäävuse seadus: $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$. Lahti mõtestatult: kolmnurga jaoks kehtib Pythagorase teoreem, s.t. kolmnurk on täisnurkne, hüpotenuusi pikkus on $v_0 = v$. Kehade suhteline kiirus $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, mis on täpselt samasuguse täisnurkse kolmnurga hüpotenuusiks. Niisiis, $u = v$ ning $s = vt$.

10. ülesanne

Need plaatide pinnaosad, mis parajasti kohakuti on, moodustavad plaatkondensaatori. Kui kattuvate pindade suurus on S_0, siis mahtuvus

$$C_0 = \frac{\varepsilon S_0}{d}.$$

Pinge U toimel koguneb plaatidele laeng $q_0 = C_0 U$. Plaatide vahel mõjuv jõud esitab tegelikult süsteemi potentsiaalse energia muutust pikkusühiku kohta. Et me ei peaks järgnevas arvesse võtma tööd, mida sooritab vooluallikas laengute liigutamisel, siis ühendame vooluallika mõtteliselt lahti. Otsitav jõud sellest ei muutu, sest too on määratud ainult antud hetkel plaatidel eksisteerivate laengutega q_0.

Nende vastasmõju potentsiaalne energia avaldub

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = C_0 \cdot \frac{U^2}{2} \cdot \frac{S_0}{S}.$$

Me võime valida plaatide asendit kirjeldava koordinaadi x nii, et $S = ax$. Siis

$$W = C_0 \cdot \frac{U^2}{2} \cdot \frac{S_0}{ax}.$$

Nüüd saame vastavalt eelmainitule:

$$F = -\frac{dW}{dx} = C_0 \cdot \frac{U^2}{2} \cdot \frac{S_0}{ax^2},$$

mis kohal $x_0 = S_0/a$ annab:

$$F = \frac{aU^2}{2} \cdot \frac{C_0}{S_0} = \frac{\varepsilon a U^2}{2d}.$$

E1. ülesanne

Kui kaks tasapeeglit on teineteise suhtes mingi nurga all peegelpinnad vastakuti ja peeglite vahele paigutada ese, tekib peeglites esemest mitu kujutist. Kujutiste arv sõltub peeglitevahelisest nurgast. Teatud nurkade puhul kattuvad kaks kujutist ja sel juhul saab kujutiste arvu N peeglites arvutada seosest $N = 360°/\alpha - 1$, kus a on peeglite vaheline nurk kraadides. Näiteks, kui peeglid on $90°$ nurga all, tekib kolm kujutist, $45°$ nurga puhul seitse kujutist jne.

Hindamine:

Idee — 4 p., kujutiste arv $90°$ nurga korral — 2 p., kujutiste arv näiteks $45°$ nurga korral — 2 p., algoritmi väljatöötamine — 2 p., täpse nurga joonestamine — 2 p.

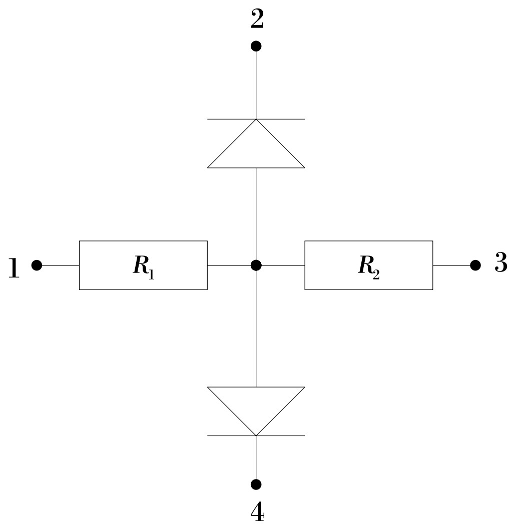
E2. ülesanne

Kinnises kastis on järgmine skeem (vt. joon.).

Numbrid klemmide juures vastavad karbil olevatele numbritele. Arvulisi väärtusi: $R_1 = (100 \pm 10)\ \Omega$ ja $R_2 = (50 \pm 5)\ \Omega$. Dioodide takistused on vahemikus $1000\ \Omega$ kuni $2000\ \Omega$.

Mõõtmine:

Kõigepealt kontrollitakse multimeetriga vooluallikate olemasolu. Et antud juhul need puuduvad, siis mõõdetakse takistust iga klemmi vahel, vahetades multimeetri polaarsust. Andmete põhjal koostatakse võrrandisüsteem, mille lahendamise tulemusel saadakse elementide takistused.



Hindamine:

Takistuse mõõtmine iga võimaliku klemmipaari vahel mõlema polaarsuse jaoks — 4 p. Võrrandite koostamine ja lahendamine — 8 p. Õige elektriskeem — 3 p.