Eesti koolinoorte 59. füüsikaolümpiaadi lõppvoor

10. märts 2012. a. Vanema rühma lahendused

1. (*HÕÕRDKEEVITUS*) Hõõrdumisest tekkiv soojushulk $Q = F_h \Delta s = F\mu\Delta s = \pi D \cdot \frac{t}{frac1f} = \pi f D\Delta t$. Teiselt poolt torude soojendamiseks vaja minev soojushulk $Q = 2mc\Delta T = 2\rho V c\Delta T$, kus m ja V on ühe toruotsa soojeneva osa mass ja ruumala. Kuna toru seinad on diameetrist kordades õhemad, võib hinnata ruumalaks $V = \pi D dl$. Kokkuvõttes saime, et

$$F\mu\pi f D\Delta t = 2\pi D dl\rho c(T_1 - T_0) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2dl\rho c(T_1 - T_0)}{\mu f \Delta t} \approx 1200\,\mathrm{N}$$

2. (*VEEJUGA*) Vaatleme torust väljuvat veeosakest kui vabalt langevat keha horisontaalsuunalise algkiirusega v, mille horistonaalsuunaline kaugus kasvab ajas lineaarselt $s = vt$, vertikaalsuunaline aga kui $h = \frac{1}{2}gt^2$. Järelikult $h \sim s^2$ ning veejoa kuju on matemaatiliselt kirjeldatav parabooli võrrandiga $y = kx^2$, kus x ja y on veejoa koordinaadid joonisel toodud teljestiku ühikutes (nullpunktiks valime teljestiku ülemise vasakpoolse nurga, x-telg olgu suunatud paremale ning y-telg alla). Määramaks joonise abil võrdetegurit k, valime mõned täisarvuliste koordinaatiga punktid (x,y), millest juga läbi läheb, näiteks (19,5), (24,8) ja (34,16). Arvutades iga punkti jaoks suhte x^2/y, leiame et $k = 0.014$.

Arvestades järgnevalt, et teljestiku ühikule vastab füüsikaline pikkus d (veejoa läbimõõt, mille loeme võrdseks toru sisediaameetriga), võime teisendada kaugused s ja h teljestiku ühikutesse:

$$x = \frac{s}{d} = \frac{vt}{d}, \quad \text{ja} \quad y = \frac{h}{d} = \frac{gt^2}{2d} = \frac{gd}{2v^2}\frac{v^2t^2}{d^2} = \frac{gd}{2v^2}x^2,$$

millest saame kiirust ja diameetrit omavahel siduva võrrandi

$$k = \frac{gd}{2v^2} \quad \text{ehk} \quad \frac{v^2}{d} = \frac{g}{2k}. \tag{1}$$

Nüüd arvestame aja t jooksul torust läbi voolanud vee ruumalaks Svt, kus S on toru sisepindala, millest saame teise kiirust ja diameetrit sisaldava võrrandi

$$V = \frac{\pi d^2}{4}vt \quad \text{ehk} \quad vd^2 = \frac{4V}{\pi t}. \tag{2}$$

Võttes võrrandi (2) ruutu ning jagades läbi võrrandiga (1), taandub kiirus välja ning alles jääb

$$d^5 = \frac{16V^2}{\pi^2 t^2}\frac{2k}{g}, \quad \text{millest} \quad d = \left(\frac{32V^2k}{\pi^2t^2g}\right)^{\frac{1}{5}} = 1\,\mathrm{mm}.$$

3. (*ELEKTRILINE SILD*) Sümmeetria tõttu ülemises ja alumises takistis (R_2 ja R_4) vool puudub. Tõepoolest, oletagem et ühes neist (nt R_2-s) läheb vool vasakult paremale.

Peegeledame joonist vertikaaltelje suhtes: R_1 ja R_3 ning $\mathcal{E}_1$ ja $\mathcal{E}_2$ vahetavad kohad, kuid takistite ning elektromotoorjõudude võrdsuse tõttu skeem ei muutu. Peegelduse käigus peaks nüüd vool muutma suuna vastupidiseks ning minema paremalt vasakule; esialgse ja peegelduse tulemusel saadud skeemi ekvivalentsuse tõttu peaks aga vool olema endiselt vasakult paremale, mis viib vastuoluni. Järelikult on vool R_2-s ja R_4-s null ning skeemilt võib vastavad juhtmed kõrvaldada. Järele jääb R_1, $\mathcal{E}_2$, R_4 ja $\mathcal{E}_2$ jadaühendus, mistõttu on voolutugevus ahelas, sh R_1-s ja R_3-s leitav kui $I = 2\mathcal{E}/2R = \mathcal{E}/R$.

4. (*KORVPALL*) Sügavale vee alla sukeldamisel surub veesamba rõhk palli kokku. Pall hakkab ise põhja vajuma, kui tema ruumala väheneb nii palju, et pallile mõjuv üleslükkejõud saab väiksemaks raskusjõust ehk palli keskmine tihedus muutub väiksemaks vee tihedusest. Kriitilisel sügavusel $\rho = m/V$, kus V on kokkusurutud korvpalli ruumala. Lõpptulemusena otsime vedelikusamba kõrgust, mis tekitab piisava rõhu, et palli ruumala väheneks väärtuseni $V = m/\rho$. Seepärast leiame esmalt pallis oleva õhu rõhu ja ruumala vahelise seose. Sukeldamata pallis on rõhk võrdne õhurõhu ja palli kestas tekkivast elastsusjõust tingitud rõhu summaga: $p_0 + p_1$. Kriitilisel sügavusel moodustab palli ruumala alla 10 % oma esialgsest väärtusest, mis tähendab, et pall on lömmi vajutatud ja elastsusjõud enam rolli ei mängi. Rõhk pallis on siis võrdne vedelikusamba rõhu ja õhurõhu summaga: $p_v + p_0$. Boyle'i-Mariotte'i seadusest on teada, et konstantse temperatuuri juures on ideaalse gaasi rõhk ja ruumala pöördvõrdelises sõltuvuses ehk

$$\frac{p_0 + p_1}{p_0 + p_v} = \frac{V_0}{V}.$$

Sellest valemist saame avaldada vedelikusamba kriitilise rõhu:

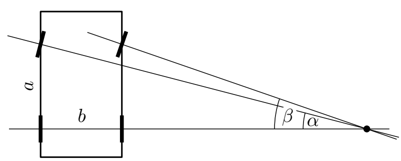
$$p_v = (p_0 + p_1)\frac{V_0}{V} - p_0.$$

Võrrutades selle avaldise veesamba rõhuga $p_v = \rho g h$, kus h on kriitiline sügavus, saame võrrandi, millest leiame

$$h = \frac{(p_0 + p_1)\frac{V_0}{V} - p_0}{\rho g}.$$

Nüüd tuleb veel avaldada palli alg- ja lõppruumala ülesandes etteantud suuruste kaudu. Lõppruumala on juba lahenduse alguses leitud ($V = m/\rho$). Algruumala jaoks kasutame ringi ümbermõõdu ja kera ruumala valemeid $C = 2\pi r$ ja $V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3$, millest saame, et $V_0 = C^3/6\pi^2$ ning lõppvastuseks

$$h = \frac{(p_0 + p_1)\frac{C^3\rho}{6\pi^2 m} - p_0}{\rho g} = 190\,\mathrm{m}.$$



5. (*REHVID*) Rattad tuleb pöörata suunda, mis ühtib nende liikumissuunaga. Kõva keha igast punktist selle punkti liikumissihile tõmmatud ristsirge läbib keha (hetkelist) pöörlemistelge. Ilmselt asub auto pöörlemistelg tagarataste telgedega samal sirgel. Samas asub see optimaaljuhul ka nii vasaku kui parema esiratta teljel. Seega otsitav nurk

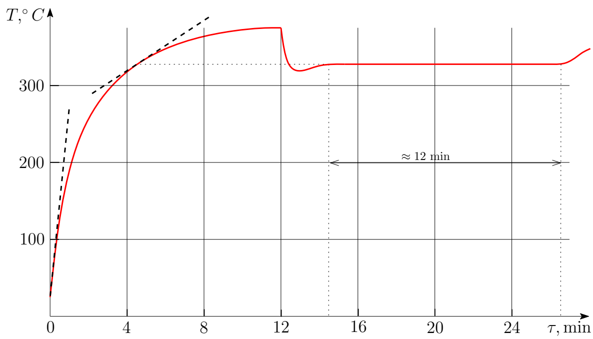
$$\beta = \operatorname{arccot}\left(\frac{a\cot\alpha - b}{a}\right) = \operatorname{arccot}\left(\cot\alpha - \frac{b}{a}\right).$$

6. (*TORU*) Kõigepealt paneme tähele, et punktallika kujutis tekib läätsest kaugusele

$$l = \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{60}\right)^{-1} \mathrm{mm} = 90\,\mathrm{mm},$$

st ekraanil. Kui peegeldavate silindriliste seinte asemel oleks kaks tasapeeglit, siis tekiks punktallika kujutiste lõpmatu jada (peegeldus, peegelduse peegeldus jne), kus kahe naaberkujutise vahekaugus on võrdne peeglite vahekaugusega 12 mm. Läheme nüüd silindrilise juhtumi juurde. Joonise tasandis lebava kiire jaoks on kiirekäik täpselt sama, mis tasapeegli puhul, st joonise tasandis tekivad kujutised samuti perioodilise rivina, kus kujutiste vahekaugus on 12 mm. Joonise tasandit võib pöörata suvaliselt ümber süsteemi sümmeetriatelje; see tähendab, et kujutised on tegelikult "laiali määritud"mööda kontsentrilisi ringjooni raadiustega $n \times 12\,\mathrm{mm}$, kus n on täisarv. Lääts tekitab neist ringidest ekraanile $\frac{90}{60}$ korda suurendatud kujutise, kus kontsentriliste ringide raadiusteks on $R = n \times 18\,\mathrm{mm}$.

7. (*AHI*) **Esimene lahendus.** On teada, et hetkeline efektiivne soojusvõimsus P_{eff} (st kuumutamisvõimsus miinus keskkonda hajuv jahtumisvõimsus) on võrdeline temperatuuri-aja graafiku puutuja tõusuga (võrdeteguriks on ahju soojusmahtuvus). Päris alguses on ahi toatemperatuuril, seetõttu esimestel sekunditel soojuskadusid peaaegu ei ole ja tiigli soojusvõimsus $P_0 = 50\,\mathrm{W} = P_{\mathrm{eff}}$, st sellisele efektiivsele võimsusele vastab puutuja tõus $\approx 250\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{min}}$ (vt. joonist). On aga selge, et kõrgematel temperatuuridel tuleb soojuskadusid arvestada: need ongi põhjuseks, miks ahju temperatuuri kasv kahaneb. Kui ahju sisse pannakse plii, siis temperatuur langeb kuni plii sulamistemperatuurini, $\approx 327\,^\circ\mathrm{C}$. Edasi läheb ahju efektiivne võimsus 100% ulatuses plii sulatamiseks (sest selle enda temperatuur ei muutu). Graafiku vasakult poolelt leiame, et temperatuuri $\approx 327\,^\circ\mathrm{C}$ juures on puutuja tõusuks $\approx 45\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{min}}$, seega selle temperatuuri juures efektiivne võimsus $\frac{45}{250}P_0 \approx 0{,}18P_0$. Sellise efektiivse võimsuse juures kuulub massi m plii sulatamiseks aega $\Delta\tau \approx 12\,\mathrm{min}$ (leitav graafikult), seega saame kirja panna $0{,}18P_0\Delta\tau = \lambda m$, kust $\lambda = \frac{0{,}18P_0\Delta\tau}{m} = \frac{0{,}18\cdot 50\,\mathrm{W}\cdot 12\cdot 60\,\mathrm{sek}}{0{,}265\,\mathrm{kg}} = 24{,}5\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$.



Teine lahendus. Loeme soojusvahetusvõimsuse võrdeliseks ahju temperatuuri ja toatemperatuuri vahega, $P_{\mathrm{sv}} = k(T - T_0)$. Graafikult leiame, et stabiliseeruv temperatuur on $T_\infty \approx 380\,^\circ\mathrm{C}$, mil kütmisvõimsus võrdub soojuskadude võimsusega P_0, st

$P_0 = k(T_\infty - T_0)$, millest $k = P_0/(T_\infty - T_0)$ ning

$$P_{\text{eff}} = P_0 - P_{\text{sv}} = P_0 \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0} \approx 50 \cdot \frac{50}{360}\,\text{W} \approx 7\,\text{W}.$$

Nüüd jääb kirjutada vaid soojusbalanss kujul $\lambda m = P_{\text{eff}}\tau$, millest $\lambda = P_{\text{eff}}\tau/m \approx 19\,\text{kJ/kg}$.

8. (*LIIVAKELL*) **Esimene lahendus.** Vaatleme liivakella masskeskme koordinaadi muutu ajavahemiku Δt jooksul. Masskeskme koordinaat avaldub kujul $x_C = \sum_i m_i x_i / \sum_i m_i$, kus summeeritakse üle kõikide osakeste i. Ajavahemiku Δt jooksul toimuv muutus seisneb selles, et ülemise liivaosa ülakiht massiga $\Delta m = v\Delta t$ siirdub koordinaadi $x_{\text{ülal}}$ juurest alumise liivaosa ülakihiks koordinaadi x_{all} juurde; vastav muutus masskeskme avaldises on $\Delta x_C = \frac{1}{M}(v\Delta t x_{\text{all}} - v\Delta t x_{\text{ülal}}) = \frac{v\Delta t}{M}(x_{\text{ülal}} - x_{\text{all}})$, kus M on liiva kogumass; siinjuures vaatlesime ülalt ärakadunud liiva kui negatiivse massiga lisandust ülemisse liivaossa. Liiva impulsi leiame kui $p = M\Delta x_C/\Delta t = vl$, kus l tähistab liivanivoode kõrguste vahet. Kaalunäidu muutu põhjustav lisajõud on impulsi tuletis aja järgi, st

$$F = v\frac{dl}{dt}.$$

Tuletise $\frac{dl}{dt}$ leidmiseks paneme tähele, et aja Δt jooksul kerkib alumine nivoo pikkuse $\Delta h = v\Delta t/\rho S$ võrra ning ülemine nivoo langeb samal määral, st nivookõrguste vahe muut $\Delta l = 2v\Delta t/\rho S$, millest $\frac{dl}{dt} = 2v/\rho$. Asendades selle tulemuse jõu avaldisse saame $F = 2v^2/S\rho$.

Teiene lahendus. Olgu kogu liivahulga kõrgus H ja liivakõrgus alumises anumas h. Alumisse anumasse voolab liiv masskiirusega v. Paneme kirja liivakella masskeskme koordinaadi:

$$x = \frac{\frac{h}{2}hS\rho + (\frac{L}{2} + \frac{H-h}{2})(H-h)S\rho}{HS\rho} = \frac{2h^2 + LH - Lh + H^2 - 2Hh}{2H}$$

Kui liivakella masskese omab kiirendust, siis peab masskeskme koordinaadi teine tuletis aja järgi olema nullist erinev. Järeldusena Newtoni II seadusest võib õelda, et liivakellale peab mõjuma masskeskme kiirendusele vastav lisajõud - see ongi kaalu näidu muutus, mida otsime! Võtame nüüd masskeskme koordinaadist kaks korda järjest ajalist tuletist, pidades meeles, et liivataseme kõrguse h tuletis aja järgi (muutumiskiirus) on seotud otseselt liiva voolu masskiirusega v järgnevalt:

$$v = S\rho\dot{h}$$

Täpiga suuruse peal tähistame vastavat ajalist tuletist. Peame meeles, et h muutumise kiirendus (teine tuletis aja järgi) peab võrduma nulliga ning et L ja H on konstantsed suurused, mistõttu nende tuletised on nullid!

$$\dot{x} = \frac{4h\dot{h} - L\dot{h} - 2H\dot{h}}{2H}$$

Võtame veelkord tuletist:

$$a = \ddot{x} = \frac{4h\ddot{h} + 4\dot{h}^2 - L\ddot{h} - 2H\ddot{h}}{2H} = \frac{2\dot{h}^2}{H} = \frac{2v^2}{HS^2\rho^2}$$

Kogu liivakellas oleva liiva mass on: $m = SH\rho$ Liivakellale mõjuv täiendav jõud (kaalu näidu muutus):

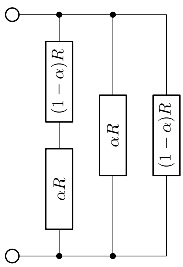
$$F = ma = \frac{2v^2}{S\rho}$$

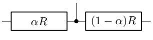
9. (*LAENGUD*) (a) Kuivõrd potentsiaal sõltub ainult x-koordinaadist, siis on elektriväli kõikjal x-telje sihiline ning impulsi y-komponent säilib. Seega, kui osake siseneb kõrgema potentsiaaliga piirkonda, siis väheneb vaid kiiruse x-komponent ning trajektoor on selline, nagu oleks valguskiirel optiliselt hõredamat kihti läbides.
(b) Täielik "sisepeegeldus" toimub siis, kui positiivse $x-$suunaga seotud kineetiline energia on suurem kui qU, mis vastab kiirusvektori ja x-telje vahelisele nugale $\arccos\sqrt{\frac{qU}{4qU}} = \frac{\pi}{3}$. Ainult sellest nurgast väiksemate nurkade puhul saab osake läbida kõrgema potentsiaaliga kihti ning selliste osakeste suhteline hulk on $\xi = \frac{\pi}{3}/\pi = \frac{1}{3}$.

10. (*ŠARNIIR*) Punkt Q liigub ainult vertikaaltelje sihis, mistõttu kiirus on ekstremaalne, kui kiirendus on null. Sel hetkel peab olema null ka punkti Q kiirenduse projektsioon vardale PQ, mis on aga võrdne punkti P kiirenduse projektsiooniga samale vardale. Kuivõrd punkti P kiirendus on moodulilt konstantne ning suunatud piki varrast PO, siis saab see projektsioon võrdseks nulliga parajasti siis, kui PO on risti PQ-ga. Siit saame koheselt minimaalse kiiruse $v_{\min} = -\omega r$ (hetkel, mil OP on horisontaalne). Olgu R sirge s see punkt, mis on samal kõrgusel punktiga O. Hetkel, mil kiirus on maksimaalne, moodustub kõõlnelinurk $QPOR$, mistõttu kolmnurgad OPQ ja OQR on võrdsed:

$$v_{\max} = \frac{\omega r}{\cos\angle PQR} = \frac{\omega r}{\cos(2\arctan r/L)} = \omega r\frac{L^2 + r^2}{L^2 - r^2}.$$

E1. (*STEREOPOTENTSIOMEETER*) Keerame uuritava seadme juhtmeotsad kindlalt oommeetri omade ümber. Mõõdame takistust juhtmeotste vahel ning keerame nuppu. Oommeetri näidul on nupu pöördenurga funktsioonina ainult üks maksimum. Et nii on, teeme kindlaks kas katseliselt (mis on lihtsam) või arvutuslikult.

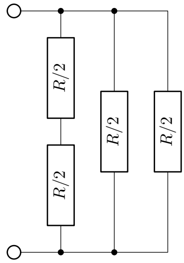


Arvutuslikus lähenemises väljendagu liuguri asendit parameeter α (mis sõltub nupu pöördenurgast mittelineaarselt, aga see polegi oluline) nii, et mõlemat potentsiomeetrit võib käsitleda kui ühendust 

. Siis on seadme kogutakistus arvutatav paremal toodud ekvivalentskeemi järgi:

$$R_{\text{seade}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha R + (1-\alpha)R} + \frac{1}{\alpha R} + \frac{1}{(1-\alpha)R}} = R\left(1 - \frac{1}{\alpha(1-\alpha)+1}\right).$$

$\frac{1}{\alpha(1-\alpha)+1}$ on positiivse ruutfunktsiooni pöördväärtus, mil on muidugi ainult üks miinimum. Paneme veel tähele, et avaldis on sümmeetriline α ja $(1-\alpha)$ vahetamise suhtes, mistõttu on mõõdetava takistuse maksimum parajasti kohas, kus $\alpha = \frac{1}{2}$ ehk liugur jagab potentsiomeetri takistuse pooleks.



Olles teinud kindlaks, et maksimume on vaid üks, saanuks sama järelduse, et see asub kohas, kus liugurid poolitavad potentsiomeetrite takistused, ka otse skeemi sümmeetriale tuginedes: skeemi 180° pöörates peab mõõdetav takistus samaks jääma ja maksimum peab sellel pöördel teisenema iseendaks. Sellises sümmeetrilises olukorras on meil paremal toodud ekvivalentskeem, mille takistus on (analoogiliselt ülalkirjutatud arvutusega) $R/5$.

Niisiis peame vastuse saamiseks mõõtma suurima võimaliku takistuse ja korrutama selle viiega. Testrinäitude hajumine fikseeritud takistuse mõõtmisel on minimaalne, seega kordusmõõtmistest on kasu vaid niivõrd, kuni need aitavad suuremat maksimumväärtust leida. Nende tulemusi keskmistada on antud katses vale, kuna teame, et (õige mõõtmistehnika juures) ei saa juhuslikult õigest suuremat takistust mõõta. Küll tuleb olla tähelepanelik, et iseennast mitte vooluringi ühendada: kätevaheline takistus võib mõõdetavaga samas suurusjärgus või mitu korda väiksemgi olla! Realistlik vastus on sõltuvalt konkreetsest katseseadmest ligikaudu $370\ldots550\,\mathrm{k\Omega}$ (potentsiomeetri nominaalväärtus oli $470\,\mathrm{k\Omega}\pm20\%$; kõrvalekaldeid lisas fakt, et ühesuguste potentsiomeetrite paarisolemise eeldus polnud tegelikult täpne).

Määramatusehinnaguna on põhiline oommeetri enda määramatus kasutatavas mõõtepiirkonnas. Kui maksimumi otsimiseks oleks rangelt dokumenteeritud ja masinlikult järgitud algoritm, saaks selle vahetulemuste järgi ka hinnata, kui täpselt nupp maksimumtakistuse juurde keerati, ning sealtkaudu leida lisaks statistilise määramatuse ning (mitte keskmistades!) täpsema tõelise maksimumi hinnangu, aga ainuüksi antud vahenditega seda teha ei saa.

E2. (*MUFFINIVORM*) Muffinivorme üksteise sisse asetades saame tema massi suurendada, jättes efektiivse pindala samaks. Muffinivormile mõjuvad kukkumise ajal raskusjõud mg ja hõõrdejõud Cv^α, kus v on muffini kiirus. Kuna muffinivormi mass on tema efektiivse pindalaga võrreldes väike, saavutab muffinivorm kukkumise jooksul oma lõppkiiruse praktiliselt hetkeliselt.Saame võrrandi $mg = cv_1^\alpha$. märgime ära kõrguse, kust me hakkame vorme kukutama ja mõõdame kukkumise aja. Samuti toimime üksteise sisse asetatud vormidega. Sel juhul saame $2mg = cv_2^\alpha$. Jagades teise võrrandi esimesega saame: $(\frac{v_2}{v_1})^\alpha = 2$. Avaldame α: $\alpha = \frac{ln(2)}{ln(\frac{v_2}{v_1})}$, kus v_2 on kahe vormi koos kukkumise kiirus ja v_1 on ühe vormi kukkumise kiirus. Kui me laseme lahti vormid mõlemal korral samalt kõrguselt, saame eeldusel, et vormid saavutavad lõppkiiruse hetkeliselt ja liiguvad ühtlaselt,$\alpha = \frac{ln(2)}{ln(\frac{t_1}{t_2})}$, kus t_1 on ühe vormi kukkumise aeg ja t_2 kahe vormi koos kukkumise aeg. Järelikult $\alpha = \frac{ln(2)}{ln(\frac{t_1}{t_2})}$. Arvuliselt $\alpha \approx 2$. Aja ebatäpsuseks hindame mõlemal juhul näiteks $\Delta t = 0{,}15\,\mathrm{s}$. Sel juhul saab määramatust hinnata näiteks maksimumi-miinimumi meetodil: $\Delta\alpha = \frac{\alpha_{max}-\alpha_{min}}{2}$, kus $\alpha_{max} = \frac{ln(2)}{ln(\frac{t_1-\Delta t}{t_2+\Delta t})}$ ning $\alpha_{min} = \frac{ln(2)}{ln(\frac{t_1+\Delta t}{t_2-\Delta t})}$, kus t_1 ja t_2 on vastavalt ühe ja kahe vormi keskmised kukkumise ajad.