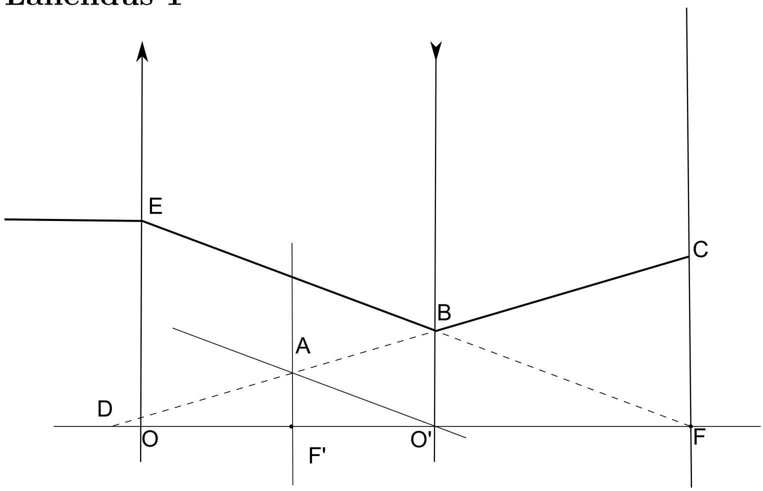
Eesti koolinoorte 60. füüsikaolümpiaad

13. aprill 2013. a. Lõppvoor.

Gümnaasiumi lahendused (10. - 12. klass)

1. (*LÄÄTSED*)

Lahendus 1



Kogu pilt on optilise peatelje suhtes sümeetriline, tänu sellele saame tegeleda ainult ühe poolega. Konstrueerime kiirte käigu, teades et kõigi nõgusläätse läbivate paraleelsete kiirte pikendused lõikuvad fokaaltasandil.

Joonisel on mõned meid huvitavad sarnased kolmnurgad

$$\Delta AF'D \sim \Delta BO'D \sim \Delta CFD$$

ja

$$\Delta EOF \sim \Delta AF'O' \sim \Delta BO'F$$

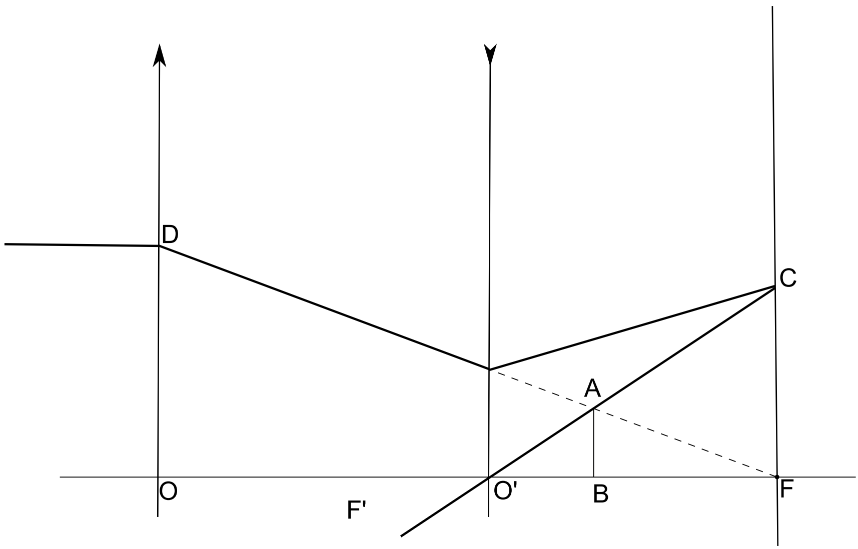
. Lisaks teame osade lõikude pikkusi: $|EO| = R$, $|OF| = f_1$, $|F'O'| = f_2$ ja $|CF| = r$. Seda teades saab moodustada neljast võrrandist koosneva lineaarvõrrandisüsteemi.

$$\begin{cases} \frac{|EO|}{|OF|} = \frac{|AF'|}{F'O} \\ \frac{|EO|}{|OF|} = \frac{|BO'|}{O'F} \\ \frac{|AF'|}{|F'D|} = \frac{|CF|}{|FD|} \\ \frac{|AF'|}{|F'D|} = \frac{|BO'|}{|O'D|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{R}{f_1} = \frac{|AF'|}{f_2} \\ \frac{R}{f_1} = \frac{|BO'|}{\frac{f_1}{2}} \\ \frac{|AF'|}{|O'D| - f_2} = \frac{r}{\frac{f_1}{2} + |O'D|} \\ \frac{|AF'|}{|O'D| - f_2} = \frac{|BO'|}{|O'D|} \end{cases}$$

Pärast süsteemi lahendamist saame tulemuseks $f_2 = \frac{R}{4r} f_1$.

Lahendus 2



Selles lahenduses kasutame läätse valemit $-\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{k}$. f ees on miinus kuna kuna tegemist on nõgusläätsega ja k ees on miinus kuna tegemist on näiva kujutisega. Kasutades kiirte pööratavuse printsiipi vaatame hoopis olukorda, kus tekib objektist CF näiv kujutis AB. Lisaks kasutame kolmnurkade sarnasust: $\Delta CFO' \sim \Delta ABO'$ ja $\Delta DOF \sim \Delta ABF$.

$$\begin{cases} \frac{|CF|}{|FO'|} = \frac{|AB|}{|BO'|} \\ \frac{|DO|}{|OF|} = \frac{|AB|}{|BF|} \\ -\frac{1}{f_2} = \frac{1}{|FO'|} - \frac{1}{|BO'|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{r}{\frac{f_1}{2}} = \frac{|AB|}{|BO'|} \\ \frac{R}{f_1} = \frac{|AB|}{\frac{f_1}{2} - |BO'|} \\ -\frac{1}{f_2} = \frac{1}{\frac{f_1}{2}} - \frac{1}{|BO'|} \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamisel saame $f_2 = \frac{R}{4r} f_1$.

2. (*PALL*)

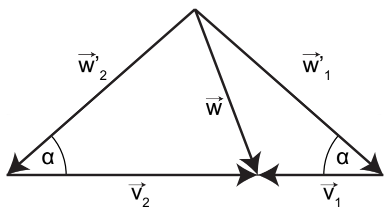
$h \propto t^2$, kus h on maksimaalse tõusu kõrgus ja t on sellele kõrgusele tõusmiseks kulunud aeg.
Olgu t_i aeg, mis kulus pallil pärast i-ndat põrget maksimaalsele kõrgusele tõusmiseks. Kuna iga piik graafikul tähistab üht põrget, siis võime mõõta graafikult 3. ja 4. põrke alguste vahelise kauguse d_3, kusjuures $t_3 = kd_3$ (kus k on mingi võrdetegur), ning 1. ja 2. põrke alguste vahelise kauguse d_1, kusjuures $t_1 = kd_1$. Seega $\frac{t_1}{t_3} = \frac{d_1}{d_3}$, kust

$$h_1 = h_3(\frac{t_1}{t_3})^2 = h_3(\frac{d_1}{d_3})^2 \approx 1{,}7\,\mathrm{m}$$

3. (*JALGRATTUR*)

Jalgratturi mõõdetav tuul $\vec{w}'$ on tuule kiirusvektori maapinna suhtes $\vec{w}$ ja jalgratturi kiirusvektori maapinna suhtes $\vec{v}$ vahe $\vec{w}' = \vec{w} - \vec{v}$. Olgu jalgratturi kiirusvektorid $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ ning tuule kiirusvektorid $\vec{w}'_1$ ja $\vec{w}'_2$ vastavalt ühele ja teisele poole sõites.

Antud juhul teame ainult kiirusi, mitte nende suundi. Teades eelnevat ja et mõõdetud tuule kiirus on sama suur mõlemas suunas liikudes, saab kiirusvektorid esitada võrdhaarse kolmnurgana (kolmnurga mõlemad pooled vastavad erinevas suunas sõitmisele ning vastavad ülal mainitud valemile, kuna tuule vektor on mõlemal juhul sama ja kiirused on paralleelsed, saab selle konstrueerida nagu joonisel).



Koosinusteoreemist:

$$\begin{cases} |\vec{w}|^2 = |\vec{w}_1'|^2 + |\vec{v}_1|^2 - 2|\vec{w}_2'||\vec{v}_1| \cos\alpha \\ |\vec{w}|^2 = |\vec{w}_2'|^2 + |\vec{v}_2|^2 - 2|\vec{w}_2'||\vec{v}_2| \cos\alpha \end{cases}$$

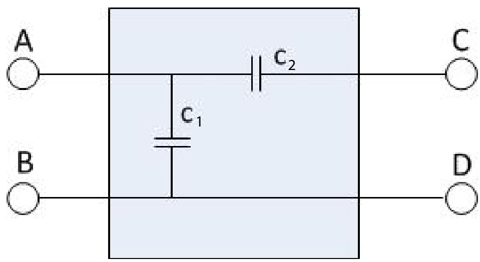
Teades, et $|\vec{v}_2| = 2|\vec{v}_1|$ ja et $|\vec{w}_1'| = 2|\vec{w}_2'|$, saame esimese võrrandi korrutada kahega ja teise sellest lahutada.

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{w}_1'|^2 - 2|\vec{v}_1|^2$$

Ehk tuule tegelik kiirus on:

$$|\vec{w}| = \sqrt{|\vec{w}_1'|^2 - 2|\vec{v}_1|^2} \approx 14\,\mathrm{km/h}$$

4. (*MUST KAST*) Sobiv skeem on näiteks selline:



Kui klemmide A ja B külge ühendada patarei ja klemmide C ja D külge voltmeeter, siis läbi kondensaatori C_2 vool ei lähe ning ta ei laadu. Pinge temal on 0 ning voltmeeter näitab U.

Kui aga patarei ühendada klemmide C ja D külge ja voltmeeter klemmide A ja B külge, laaduvad mõlemad kondensaatorid üheaegselt ning pinge U jaotub nende vahel võrdselt. Voltmeeter näitab $\frac{U}{2}$.

5. (*SATELLIIT*)

Satelliidile orbiidil mõjuv kesktõmbejõud on Maa poolt satelliidile avaldatav gravitatsioonijõud. Saame

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$$

, kus m on satelliidi mass ja R orbiidi raadius. Kuna geostatsionaarne satelliit Maa suhtes ei liigu, peab selle tiirlemisperiood olema samuti 24 h. Saame $v = \frac{2\pi R}{t}$. Neist võrranditest saame

$$4\pi^2 R^3 = GM \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}} = 42\,400\,\mathrm{km}.$$

Maa keskpunkt, satelliit ning satelliidilt nähtava maa-ala serval asetsev suvaline punkt moodustavad täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on satelliidi orbiidi raadius ning üheks kaatetiks Maa raadius. Maa keskmes asuvaks nurgaks saame $\alpha = \arccos \frac{r}{R}$, kuid kuna meid huvitab satelliidilt nähtava ala läbimõõt, peame leidma nurga 2α. Sellele nurgale vastav kaare pikkus Maa pinnal on $d = 2r\alpha$ (kui nurk on radiaanides). Lõppvastuseks saame

$$d = 2r \arccos \frac{r}{\sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}} = 18\,000\,\mathrm{km}.$$

6. (*TIIK*) Mõõdame jooniselt ringide läbimõõdud, saame 0,1; 0,4; 0,9; 1,6; 2,5; 3,5 ja 4,5 ühikut L-i. Näeme, et alguses on liikumine ühtlaselt kiirenev, ehk kehtib $\lambda \ll h$ seos $r \approx \frac{gt^2}{2\pi}$. Sellest saame arvutada esimestele ringidele vastavad ajahetked, $t = \sqrt{\frac{2\pi r}{g}}$: $\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}$, $2\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}$, $3\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}$, $4\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}$, $5\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}$. Näeme, et joonise tegemiseks kasutatud ajavahemik oli $T = \sqrt{\frac{\pi L}{10g}}$. Hiljem on liikumine ühtlane, kiirusega $v = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{10Lg}{\pi}}$. Teisalt teame, et $v \approx \sqrt{hg}$, seega tiigi sügavus on $h \approx \frac{v^2}{g} = \frac{10L}{\pi}$. Vastus: $h/L = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}2$.

7. (*MIKROSKOOP*)

Esimeses teravustatavas asendis, kus lääts on objektile lähemal kui sensorile (st suurendus > 1), olgu läätse kaugus esemest a ja sensorist b. Kujutise joonsuurendus on seega $k = b/a$. Teises asendis on nimetatud kaugused lihtsalt ümbervahetatud ja suurendus vastavalt $l = a/b$. Niisiis $25 = k/l = b^2/a^2$.

Analüüsime nüüd esimesele asendile vastavate kauguste näitel sensori valgustatuse küsimust. Kuivõrd joonsuurendus on k, siis pindalamuutust iseloomustav tegur on vastavalt k^2. Lisaks kujutise suurusele mõjutab selle heledust ka valguse hulk, mis pääseb läbi objektiivi. Vaadeldava eseme igast punktist lähtub valgus, mis on enam-vähem ühtlaselt hajutatud üle kõigi suundade, seega läätse läbiva kiirguse hulk on proportsionaalne selle osaga mõttelise sfääri pinnast, mille lõikab välja läätse apertuur: $\Omega = d^2/a^2$, kus d on läätse diameeter. Kokkuvõttes saame, et kujutise heledus on võrdeline suurusega $\Omega/k^2 = d^2/b^2 \propto b^{-2}$. Teises asendis, kus lääts on sensorile lähemal, on sama näitaja vastavalt a^{-2}, seega sel juhul on kujutise heledus suurem $a^{-2}/b^{-2} = b^2/a^2 = 25$ korda.

8. (*KAUPLUS*)

Soojusvahetus eesruumi ja õue vahel peab olema sama suur kui soojusvahetus eesruumi ja kaupluse vahel. Seega püsib päevasel ajal eesruumis temperatuur $T_4 = \frac{T_0+T_1}{2} = 12$ kraadi ning eesruumi ehitusega vähenesid ukse lahtikäimisest tingitud soojuskaod 2 korda. See vähenemine oli $\Delta P = P_1 - P_3 = 0{,}8$ kW, seega enne eesruumi ehitamist olid vastavad soojuskaod $P_0 = 2\Delta P = 1{,}6$ kW.

Päevasel ajal on temperatuuride vahe õuega $\Delta T_1 = 16$ kraadi ning öisel ajal $\Delta T_2 = 20$ kraadi. Seega kui päeval oleks kauplus kinni, siis kaupluse radiaatorid peaks töötama võimsusega $P_1' = P_2\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = 4{,}0$ kW.

Kaupluse lahtioleku tõttu kütavad inimesed ja valgustid võimsusega P_x ja uksest läks kaduma P_0. Seega saame võrduse

$$P_1' = P_1 + P_x - P_0,$$

kust leiame $P_x = 1{,}0$ kW.

9. (*JALGPALLURID*)

Vaatame pallide algkiirusi komponentide kaupa. Olgu 1. palli algkiiruse vertikaalkomponent v_{1vert} ning horisontaalkomponent piki jalgpallureid ühendavat sirget v_{1piki} ja risti selle sirgega v_{1risti}. Teise palli jaoks on vastavad komponendid v_{2vert}, v_{2piki} ja v_{2risti}. Kokkupõrke hetkel peavad mõlemad pallid olema läbinud ristsuunas võrdse vahemaa. Kuna pallide ristsuunaline kiirus ei muutu, siis peab kehtima $v_{1risti} = v_{2risti}$.

Kokkupõrkeks peavad pallid olema jõudnud ka samale kõrgusele. See tingimus on ilmselt täidetud, kui pallide algsed vertikaalkiirused on võrdsed, mille korral on pallid igal ajahetkel samal kõrgusel. Oletame,

et pallid võiksid teatud hetkel samale kõrgusele jõuda ka juhul kui näiteks esimese palli algne vertikaalkiirus on väiksem. Pallide tõusuaeg on arvutatav valemist $t = v_{vert}/g$. Seega pöördub esimene väiksema vertikaalsuunalise algkiirusega pall varem tagasi. Kui teine pall lõpuks laskuma hakkab, siis liigub esimene pall juba maa poole. Kuna mõlemad pallid kiirenevad võrdselt raskuskiirendusega, siis on laskumisel esimese palli kiirus alati suurem ja teine pall ei jõua selle pallide õhusoleku ajal järele. Seega pole kokkupõrge erinevate vertikaalkiiruste korral võimalik ja peab kehtima $v_{1vert} = v_{2vert}$.
Kuna algkiirused olid moodulilt võrdsed ja $v^2 = v_{vert}^2 + v_{piki}^2 + v_{risti}^2$, siis peavad ka algkiiruste pikikomponendid olema absoluutväärtuselt võrdsed. Võimalikud kokkupõrkekohad on mõlemast jalgpallurist võrdsel kaugusel ja nende punktihulk moodustab maapinna tasandile projekteerituna sirge, mille otspunktide kaugus mõlemast jalgpallurist on määratud palli maksimaalse lennukaugusega. Selle leidmiseks avaldame näiteks lennuaja, mis on võrdne kahekordse ajaga, mis kulub raskusjõu mõjul vertikaalkiiruse kahanemiseks nullini

$$t = 2\frac{v_{vert}}{g}.$$

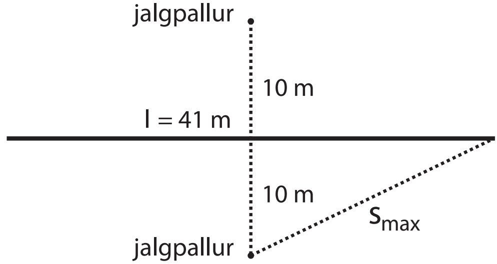
Selle ajaga liigutakse horisontaalsihis vahemaa

$$s = v_{hor}t = 2\frac{v_{hor}v_{vert}}{g}.$$

Suurim lennukaugus saavutatakse, kui $v_{vert} = v_{hor} = v/\sqrt{2}$ ja seega $s_{max} = v^2/g$.
Täisnurksest kolmnurgast leiame kokkupõrkepunktide piirkonna pikkuse

$$l = 2\sqrt{s_{max}{}^2 - (d/2)^2} = 2\sqrt{\frac{v^4}{g^2} - \frac{d^2}{4}},$$

mille arvväärtus on 41 m.



10. (*KONDENSAATOR*)

Plaatkondensaatori mahtuvus on $C = \epsilon_0 S/d$, ning seega esialgu on kondesaatoril laeng

$$Q_0 = CU_0 = \epsilon_0 S U_0/d$$

ning koguenergia

$$E = CU_0^2/2 = \epsilon_0 S U_0^2/2d$$

. Et kondensaator on patareist lahti ühendatud, laeng säilib, aga pinge muutub, kui viime sisse metalliplaadi.

Olgu metallplaadi kaugus ühest kondensaatori plaadist x, siis on tegemist kahe jadamisi plaatkondensaatoriga, üks plaadivahelise kaugusega x ning teine kaugusega $d-(d/2+x) = d/2-x$. Uute kondensaatorite kogumahtuvuse C' leiame seosest

$$1/C' = 1/C(x)+1/C(d/2-x) = \frac{x}{\epsilon_0 S}+\frac{d/2-x}{\epsilon_0 S} = \frac{d/2-x+x}{\epsilon_0 S} = \frac{d}{2\epsilon_0 S},$$

kust $C' = 2C$. Seega süsteemi uus koguenergia on

$$E' = Q_0^2/2C' = \epsilon_0 S U_0^2/4d$$

ning ei sõltu plaadi täpsest asukohast kondensaatori sees. Süsteemi uue ja vana koguenergia vahe peab võrduma välisjõudude poolt sooritatud tööga, mis sel juhul tuleb negatiivne:

$$E' = E + A \to A = E' - E = -\epsilon_0 S U_0^2/4d.$$

Et välisjõu töö on negatiivne, tõmbub plaat ise kondesaatori sisse.

E1. (*TÄHT*) *a)* Ühendame patarei tähe kahest tipust tulevate juhtmetega (olgu need näiteks roheline ja kollane). Sel juhul on takistid $\mathrm{R_R}$ ja $\mathrm{R_K}$ patareiga jadamisi ühendatud ning mõlemat takistit läbib võrdse tugevusega vool. Mõõdame nendele takistitele langevad pinged U_R ja U_K, ühendades voltmeetri esmalt kollase ning punase ning seejärel rohelise ning punase juhtmega. Kuna siin eeldame, et voltmeeter on ideaalne, siis punase juhtmega takistit vool ei läbi ning temale pinget ei lange. Seetõttu saame mõõtmistest otse teada pinge kollase ning rohelise juhtmega takistitel. Ohmi seaduse järgi kehtib võrdsete voolutugevuste korral seos

$$\frac{R_R}{R_K} = \frac{U_R}{U_K}.$$

Seega annab mõõdetud pingete jagatis takistuste R_R ja R_K suhte. Kui kordame samu mõõtmisi veel kaks korda, siis saame takistuste suheteks

$$\frac{R_R}{R_K} \approx 2,\ \frac{R_P}{R_R} \approx 2,\ \frac{R_P}{R_K} \approx 4.$$

Nagu näha, siis on väikseima väärtusega takisti $\mathrm{R_K}$ ja vastuseks anname kõigi takistite väärtused just tema takistuse suhtes: $R_{Ks} = 1$, $R_{Rs} = 2$ ja $R_{Ps} = 4$.

b) Takistuste absoluutväärtuste määramiseks leiame nende seose voltmeetri takistusega. Esmalt mõõdame patarei klemmipinge U koormamata olukorras. Järgmisena koormame patarei tähe kahe haruga ja mõõdame uuesti klemmipinge. Nagu näeme, siis voltmeetri näit võrreldes koormamata juhuga praktiliselt ei lange, mis tähendab, et pingeallika sisetakistusega pole vaja arvestada. Teatavasti saab reaalset voltmeetrit kujutada kui lõpmatu takistusega ideaalset voltmeetrit, millega on rööbiti ühendatud reaalse voltmeetri takistusega võrdse väärtusega takisti. Ühendame nüüd jadamisi patarei, voltmeetri ja tähe kaks haru. Voltmeeter mõõdab nüüd pinget U_V omaenda takistil. Jadaühenduses jaotub patarei pinge

$$U = U_{R1} + U_{R2} + U_V,$$

kus U_{R1} ja U_{R2} on patareiga ühendatud tähe harudele langevad pinged. Seega $U_{R1} + U_{R2} = U - U_V$ ja jällegi Ohmi seadus rakendades saame

$$\frac{R_1 + R_2}{R_V} = \frac{U - U_V}{U_V},$$

kus R_V on voltmeetri takistus. Nagu näha on mõõdetavate suuruste U ja U_V vahe suurim ja tulemus täpseim, kui kasutada kahte suurema väärtusega takistit. Ülesande a-osast teame, et $R_R = 2R_K$ ja $R_P = 4R_K$, millest saame arvutada

$$R_K = \frac{R_V(U - U_V)}{6U_V}.$$

Kuna $R_V = 4500\,\Omega$ ja tüüpiliselt $U \approx 5.8$V ning $U_V \approx 5.3$V, siis saame takistite väärtusteks $R_K \approx 70\,\Omega$, $R_R \approx 140\,\Omega$ ja $R_P \approx 280\,\Omega$.

E2. (*PINKSIPALL*)

Paneme palli kahe joonlaua vahele, hoiame nende ühed otsad koos ja vajutame teistest otstest tugevalt kokku. Sellisel juhul moodustab hõõrde- ja rõhumisjõu summa pinnanormaaliga nurga $\alpha = \arctan(\mu)$. Mõõdame nurga 2α joonlaudade vahel (mõõtes joonlaudadade pikkuse palliga kokkupuutepunktini b ja kokkupuutepunktide vahekaudus a, $\alpha = \arcsin(a/2b)$) ning selle abil $\mu = \tan\alpha = a/\sqrt{4b^2 - a^2}$.