Eesti koolinoorte 61. füüsikaolümpiaad

12. aprill 2014. a. Lõppvoor.
Gümnaasiumi ülesannete lahendused

1. (*RUUDUSTIK*) Sümmeetria tõttu on ruudustiku kaks tähistamata nurka ja keskpunkt sama potentsiaaliga, mistõttu võid need kolm punkti kokku ühendada. Saadud skeem jaotub ilusti rööp- ja jadaühendusteks, nende abil saame punktide A ja B vaheliseks takistuseks $R = 1{,}5\,\Omega$.

2. (*VIIUL*) Tekkival seisulainel peavad olema sõlmed mõlemas keele võnkuva osa otspunktis, seega võngub alla vajutades osa pikkusega $\frac{3}{7}L$, millele vastab lainepikkus $\lambda_0 = \frac{6}{7}L$. Puudutades võngub kogu keel ning on kolm tingimust — sõlmpunktid on mõlemas otsas ning lisaks puudutatavas punktis. Seega peab sellest punktist mõlemale poole mahtuma täisarv poollainepikkusi. Võnkuvate osade suhe on $\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}}$ ehk $\frac{3}{4}$. 3 ja 4 on ühistegurita, Seega peab jääma võnkuvatele pooltele vastavalt 3 ja 4 poollainepikkust. Vaadeldes pikkusega $\frac{3}{7}L$ keele poolt taipame, et $\lambda = \frac{2L}{7}$ ning $\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 3$.

3. (*PAISUPAAK*) Et avariiventiil avaneks, peab rõhk süsteemis kasvama väärtuseni $p = p_0 + \Delta p = 2{,}2p_0$. Paisupaagis olev õhk on seega kokku pressitud ruumalale $V_2 = V_1 p_1/p$ (gaasi olekuvõrrandist konstantsel temperatuuril), mis tähendab, et vesi sai paisuda ruumala $\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{7}{22}V_1$ võrra. See aga moodustab

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{7}{22}\frac{V_1}{V_0} \approx 0{,}025 = 2{,}5\%$$

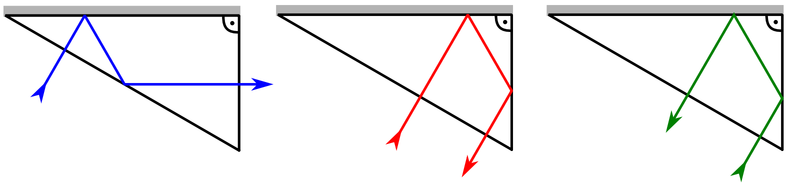
vee algsest ruumalast. Et vee mass jääb samaks, tähendab see tiheduse kahanemist väärtuseni

$$\rho' = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\rho_0 \approx (1-\alpha)\rho_0 = 975\,\mathrm{kg/m^3}.$$

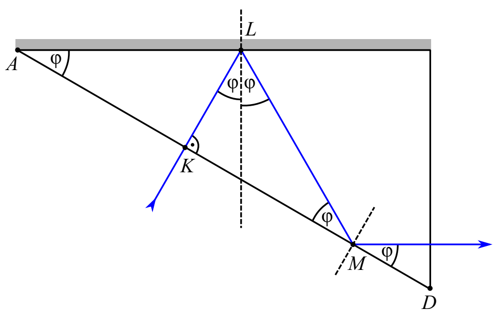
Temperatuuri ja tiheduse sõltuvuse graafikult loeme, et see vastab temperatuurile $t_{\max} = 75\,{}^\circ\mathrm{C}$.

4. (*PERISKOOPPRILLID*)

1. Kuna sisenevad ja väljuvad kiired on prisma pinnaga risti, siis keskkondade lahutuspiiril nende suund ei muutu. Kui kiir langeb prismale lõigul AB, siis peegeldub see esmalt prisma ülemisel tahul, seejärel alumisel tahul ning väljub prismast läbi parempoolse tahu (vt joonist). Kui kiir langeb prismale lõigul BC, siis peegeldub see ülemisel tahul, siis parempoolsel tahul ning väljub läbi alumise tahu ja ei jõuagi silma. Kui kiir langeb prismale lõigul CD, siis peegeldub see esmalt parempoolsel tahul, seejärel ülemisel tahul ning väljub jällegi läbi alumise tahu.

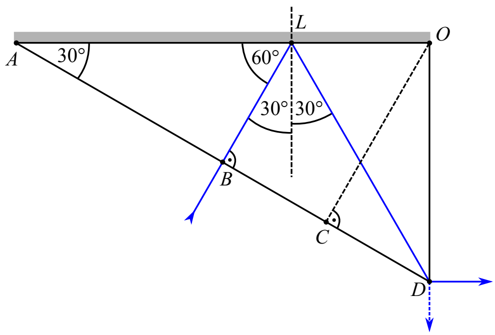


2. Vaatleme kiirt, mis siseneb prismasse lõigul AB. Kuna sisenev kiir on pinnaga risti, siis tekib täisnurkne kolmnurk AKL (vt joonist). Kolmnurga üheks teravnurgaks on φ ja seega on teise teravnurga suurus $90° - \varphi$. Kuna viimane nurk on esimesel peegeldumisel langemisnurga täiendnurgaks, siis on ka langemisnurk φ. Peegeldumisseadusest järeldub, et esimene peegeldumisnurk on samuti φ. Kuna prismast väljuv kiir on paralleelne prisma ülemise tahuga, siis on teisel peegeldumisel peegeldumisdumisnurga täiendnurk ja seega ka langemisnurga täiendnurk φ. Näeme, et täisnurkse kolmurga KLM teravnurgad on φ ja 2φ. Kuna kolmnurga sisenurkade summa on $180°$, siis $\varphi = (180° - 90°)/3 = 30°$.



Märkus: nüüd, kui prisma tipunurk on leitud, saame veenduda, et kui pinnaga risti sisenenud kiir peegeldub prisma alumiselt või parempoolselt tahult, siis on need peegeldumised täielikud. Eelmisest alaülesandest on näha, et nendel juhtudel on langemisnurgaks $90° - \varphi = 60°$. *Täieliku sisepeegeldumise piirnurk on* $\alpha = \arcsin(1/n) = 42°$. *Langemisnurk* $60°$ *on sellest suurem ehk toimub täielik sisepeegeldumine.*

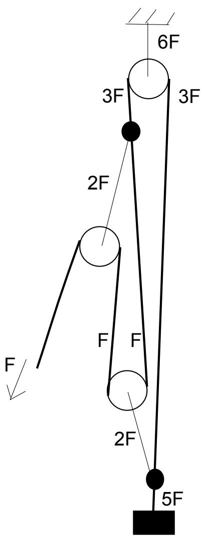
3. Kui kiir siseneb prismasse punktis B, siis läbib väljuv kiir punkti D (vt joonist). *Märkus: väljuva kiire suund pole sel juhul üheselt määratud, kuid see ei oma ülesande lahendamisel tähtsust.* Kasutades eelmises alaülesandes saadud φ väärtust, on näha, et kolmnurgad ABL ja BDL on teineteise peegeldused lõigu BL suhtes (öeldakse, et need kolmnurgad on kongruentsed). Seega on lõikude AB ja BD pikkused võrdsed, millest järeldub, et $|AB| = l/2$. Kui kiir siseneb prismasse punktis C, siis peegeldub see punktis O otse tagasi ning väljub prismast punktis C. Täisnurksetest kolmnurkadest saame, et $|AO| = \cos(30°)|AD|$ ja $|AC| = \cos(30°)|AO|$ ehk punkti C kaugus punktist A on $|AC| = \cos^2(30°)|AD| = \frac{3}{4}l$.

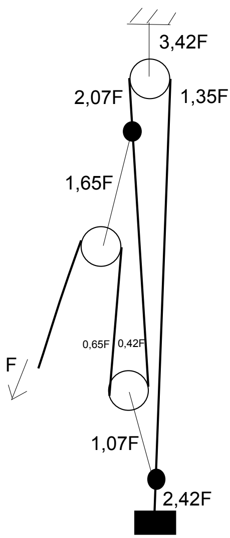


4. Ühe tasapeegli kasutamisel paistab tekst peegelpildis. Seetõttu tuleb teksti õigetpidi nägemiseks kasutada süsteemi, kus toimub paarisarv peegeldusi.

5. (*KAMMID*) Kui hall kamm liigub ühe pii võrra, on uus pilt identne esialgsega ning järelikult on tume laik liikunud ühe "lainepikkuse" võrra. Ühe laikude "lainepikkuse" kohta tuleb 7 halli kammi piide "lainepikkust", seega liiguvad hallid laigud 7 korda kiiremini kui hall kamm: $v = 7\,\mathrm{cm/s}$.

6. (*POLÜSPAST*) Hõõrdevaba ploki korral on pinge põhiköies jääv, muutub vaid selle suund. Hõõrdega ploki korral osa põhiköie pingest kandub plokile, kusjuures esmases lähenduses alla ja ülesse suunatud hõõrdejõud kompenseerivad üksteist. Tasakaalutingimuse rahuldamiseks peab ploki kinnituse pinge olema võrdne plokki läbiva põhiköie pingete summaga. Mittelibisevate sõlmede korral peab alla ja ülesse suunatud pingete vahel valitsema tasakaal. Lahendamist on mugav alustada kui määrata päästja poolseks tõmbejõuks F ning alustada sellest otsast polüspasti läbimist. Hõõrdevabal juhul on jõuülekanne $\frac{5}{1}$, hõõrde korral $\frac{2{,}4}{1}$.





7. (*SPORTAUTO*) Minnes üle autoga seotud mitteinertsiaalsesse taustsüsteemi, tuleb lisada veojõule F_v vastassuunaline arvväärtuselt võrdne inertsiaaljõud F_i, mis rakendub masskeskmele. Olgu toereaktsioonid esiteljel N_1 ja tagateljel N_2. Jõudude võrrandid: $F_v = \mu N_1$, $F_v = F_i$, $N_1 + N_2 = mg$, $ma = F_v$. Saame kirja panna ka jõumomentide võrrandi tagatelje jaoks $F_i h + N_1 b - mgs = 0$. Lahendades võrrandisüsteemi saame $a = \frac{gs}{h+\frac{b}{\mu}}$.

8. (*SILINDRILISED ANUMAD*) Kui tühi anum kerkib vahemaa x võrra, siis tema all vabaneb ruumala $\pi r^2 x$, mille täidab silindritevahelisest ruumist pärit vesi. Vajugu nivoo vahemaa y võrra; ruumalade võrdsuse tõttu $\pi r^2 x = \pi(R^2 - r^2)y$, seega

$$y = x\frac{r^2}{R^2 - r^2}.$$

Kui $x \ll L$, siis süsteemi potentsiaalne energia väheneb vee ülevalt alla ümberpaigutumise tõttu suuruse

$$E_p = g\rho\pi r^2 xL$$

võrra. Energia balansis võime ignoreerida sisemise silindri otsa juures toimuva vee liikumise kineetilist energiat, kuna selles osaleva vee hulk on väga väike võrreldes langeva vee hulgaga. Seetõttu vee kineetiline energia

$$E_k = \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - r^2)L\dot{y}^2,$$

kus $\dot{y}$ tähistab y tuletist aja järgi. Võttes energia jäävuse seadusest $gr^2x = \frac{1}{2}(R^2 - r^2)\dot{y}^2$ tuletise aja järgi leiame

$$gr^2\dot{x} = (R^2 - r^2)\dot{y}\ddot{y}.$$

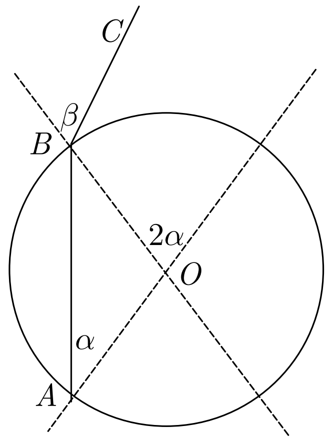
x ja y vahelise seose tõttu kehtib võrdus $r^2\dot{x} = (R^2 - r^2)\dot{y}$, mistõttu

$$\ddot{y} = g \Rightarrow \ddot{x} = g\frac{R^2 - r^2}{r^2} \approx 4{,}3\,\mathrm{m/s^2}.$$

9. (*TRAATRÕNGAD*) Läheme süsteemi, mis pöörleb nurkkiirusega $\omega/2$; seal on näha, et lõikepunkt ei pöörle vaid liigub radiaalselt. Seega laboratoorses süsteemis on selle nurkiirus $\omega/2$; sellise nurkkiirusega pöörleb kõõl AB; et kesknurk on kahekordne piirdenurk, siis raadius OB (kus O on seisva rõnga keskpunkt) pöörleb nurkkiirusega ω ning järelikult on lõikepunkti kiirus samaselt võrdne ωR-ga.

10. (*KLAASSILINDER*) Tähistame märgitud punkti A-ga ning murdugu sealt lähtunud kiir punktis B nii, et suundub eemale läbi punkti C, vt joonis. Sihi BC suunast kaugelt vaadatuna näeme tumeda punkti asukohana punkti B. Uurime, kuidas sõltub kiire BC levikusuund, mida kirjeldame AO ja BC vahelise nurga $2\alpha - \beta$ abil, kiire algsest levikusuunast α:

$$2\alpha - \beta = 2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha).$$



Silindri algasendi korral $2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha) = 0$, mille üks lahend $\alpha = 0$ annab keskmise näiva punkti ning kaks külgmist tumedat punkti vastavad võrrandi $\sin(2\alpha) = n \sin \alpha$ ülejäänud lahenditele vahemikus $-45° < \alpha < 45°$. Kui pöörata nüüd silindrit nurga δ võrra, siis vastavad näivad punktid võrrandi

$$2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha) = \delta$$

lahenditele. Võrrandi vasakul pool on funktsioon, mis väikeste nurkade puhul käitub kui $(2-n)\alpha$; suuremate nurkade puhul teise liidetava suhteline mõju kasvab. Seega juhul $2 > n$ on tegemist väikeste nurkade puhul kasvava funktsiooniga, mis läheb suuremate nurkade puhul üle kahanevaks; Juhul $2 < n$ on see aga monotoonselt kahanev funktsioon. Kuivõrd $\delta = 0$ puhul on kolm lahendit, siis peab olema tegemist esimese juhtumiga, $2 > n$. Nende pöördenurkade δ puhul, mis on suuremad selle funktsiooni lokaalsest maksimumist, on võrrandil vaid üks lahend. Funktsioon saavutab globaalse maksimumi täieliku sisepeegelduse piirjuhul

$$n \sin \alpha = -1,$$

mis annab pöördenurga

$$90° - 2 \arcsin \frac{1}{n} = 15° \Rightarrow n = 1/\sin 37{,}5° = 1{,}64.$$

E1.(*FRESNELI LÄÄTS*) Määrame läätse fookuskauguse.

$$\frac{1}{f_L} = D_L = \frac{(n-1)}{R}$$

Täidame läätse hammastatud poole ja läbipaistva plaadi vahe veega, mille tulemusena saame liitläätse. Nüüd määrame selle liitläätse fookuskauguse.

lahutame selle kaheks lähedal asetsevaks iseseisvaks läätseks, kus negatiivse vesiläätse optiline tugevus on

$$\frac{1}{f_v} = D_v = \frac{(n_v-1)}{-R}$$

Selle läätsesüsteemi optiline tugevus ja fookuskaugus on

$$\frac{1}{f_s} = D_s = D_L + D_v = \frac{(n-1)}{R} + \frac{(n_v-1)}{-R} = \frac{(n-n_v)}{R}$$

Seega

$$\frac{1}{f_L} = \frac{(n-1)}{R} \quad ja \quad \frac{1}{f_s} = \frac{(n-n_v)}{R}$$

Lahendame süsteemi ja avaldame murdumisnäitaja

$$n = \frac{n_v \cdot f_s - f_L}{f_s - f_L}$$

Kui $f_s = 0{,}43\,\mathrm{m}$ ja $f_L = 0{,}15\,\mathrm{m}$, siis $n = 1{,}507$

Märkus: Kaugete objektide puudumisel peaks fookuskauguse täpseks määramiseks kasutama läätse valemit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{k}$$

kus f on fookuskaugus, a esemekaugus läätsest ning k kujutise kaugus läätsest.

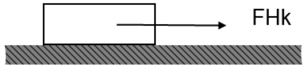
E2.(*KLOTS*)

Idee 1

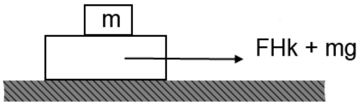
Niidi poolt avaldatav jõud on tõmbejõud, mis avaldub tõmbesihis.

Idee 2

Klotsi hõõrdeteguri määramine koormata (või vähekoormatud klots)



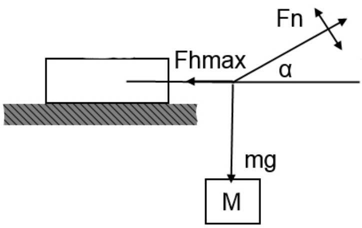
Eelmise katse klotsile on lisatud koormis massiga M.



$$F_{H_{k+mg}} - F_{H_k} = \mu mg \quad => \quad \mu = \frac{F_{H_{(k+mg)}} - FH_k}{mg}$$

Idee 3

Mõõdame jõudu. Jõudu, millegamõjutame klotsi saab muuta muutes niidi tõmbenurka α ja hoides klotsilt tuleva niidi horisontaalse.



$$\frac{mg}{F_{H_{max}}} = \tan\alpha \quad => \quad F_{H_{max}} = \frac{mg}{\tan\alpha}$$

Märkused:

Paremini saab hõõrdejõudu mõõdetud, kui nurk α asub vahemikus $20° - 70°$, milleks tuleb valida sovibad koormised.

μ määramise täpsus on suurem siis kui juurdelisatav koormis on suur.

Kuna μ oli väike, sai parima tulemuse kui niidi otsas oli vähim mass ja/või klots algselt lisa koormaga.

NB! Lahendusvariandid, mis sisaldavad niidi hõõret üle laua serva saavad maksimaalselt 6 punkti.