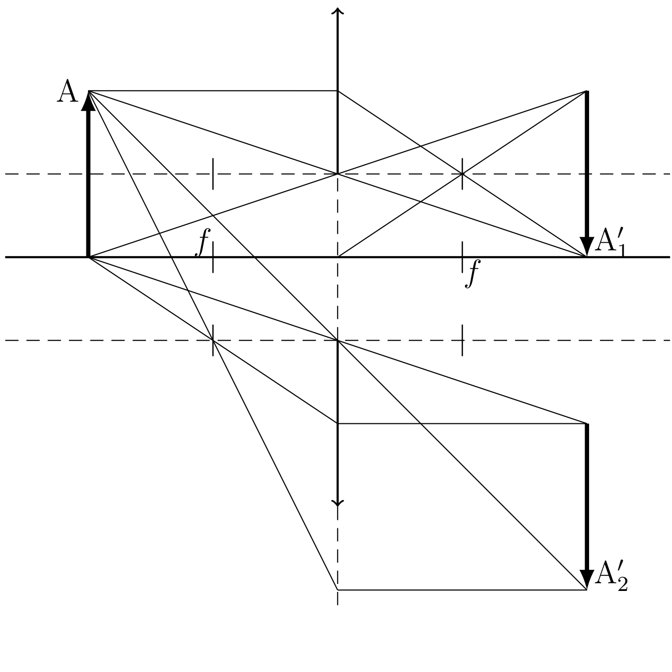
Eesti koolinoorte 65. füüsikaolumpiaad

14. aprill 2018. a. Vabariiklik voor.
Gümnaasiumi *ülesannete lahendused*

1. (*POOLITATUD LÄÄTS*) (*6 p.*) *Autor: Hans Daniel Kaimre*

Ülesande püstituses on öeldud, et esialgse skeemi korral on lääts objektist ja kujutisest võrdsel kaugusel. Selline olukord realiseerub, kui nii objekt kui kujutis asuvad läätsest kahekordses fookuskauguses, kusjuures süsteemi suurendus on 1(objekt ja kujutis on sama suured). Läätse pooleks lõikamisel ja poolde nihutamisel joonisel toodud skeemi järgi saame kaks uut läätse, mille fookuskaugused on endiselt samad, kuid optilised peateljed on nihkes. Seega tekib ekraanile kaks samasuurt kujutist kui enne, mis on omavahel vertikaalselt nihutatud ning millede intensiivsus on võrreldes esialgse kujutisega tunduvalt vähenenud. Seejuures konstrueerimisel paneme tähele, et kuigi reaalselt läätsest väljapool olevast piirkonnast kiiri läbi ei lähe, saame neid siiski kujutise konstrueerimiseks kasutada.



2. (*AUK TÜNNIS*) (*8 p.*) *Autor: Hans Daniel Kaimre*

Veepiiril olevat vett saame vaadelda kui voolavat vett kõrgusel h, mille kiirus on null ning kus rõhk peab olema võrdne õhurõhuga. Tünni põhjast väljuv juga ava juures on h võrra madalamal, rõhk peab samamoodi olema võrdne õhurõhuga, kuid juga liigub kiirusega v. Bernoulli seadusest saame kirja panna, et $\rho gh = \rho v^2/2$, kust saame et $v^2 = 2gh$. Alternatiivselt saame kirja panna energia jäävuse seaduse väikese veekoguse Δm jaoks, mille kaugus anuma põhjast on h: $gh\Delta m = \Delta m \frac{v^2}{2}$, kus oleme arvestanud, et vedeliku ülemisel piiril on vee voolamiskiirus praktiliselt 0, ning et energiakadudega ei arvesta.

Väljuvas joas peab vooluhulk ajaühikus olema sama, mis tähendab, et kehtib $A_1 v_1 = A_2 v_2$, kus A ja v on vastavalt joa ristlõikepindala ja kiirus. Kuna $A = \pi d^2/4$, saame seose ümber kirjutada kujule $v_2 = (d_1^2/d_2^2)v_1$. Raskuskiirendusega liikuva keha läbitud teepikkus alg- ja lõppkiiruste kaudu avaldub kui:

$$l = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \Rightarrow l = \frac{\frac{d_1^4}{d_2^4} v_1^2 - v_1^2}{2g} \Rightarrow v_1^2 = \frac{2gl}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1}$$

Vaatleme juhtu, kus $v_1 = v$ on kiirus kohe ava juures. Sel juhul saame kaks avaldist v^2 jaoks võrduma panna:

$$2gh = \frac{2gl}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1} \Rightarrow h = \frac{l}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1}$$

Veejoa läbimõõdu ava juures leiame graafikult punktist $l = 0$, teise punkti valime ise suvaliselt: Valides selleks (28,1.79), saame vastuseks $h = 28/(2^4/1.79^4 - 1) = 50\,\mathrm{cm}$.

3. (*PEEGELPÕHI*) (*8 p.*) *Autor: Sandra Schumann*

Paneme tähele, et valemi järgi kui keskkonna murdumisnäitaja suureneb, aga läätse murdumisnäitaja jääb samaks, siis läätse optiline tugevus väheneb ja fookuskaugus suureneb. Seega on ainus viis, kuidas valguskiired saaksid ka pärast anuma vett täis valamist samas punktis koonduda, see, kui vee sees valguskiired peegelduksid põhjas olevalt peeglilt ja seejärel kooonduksid samas punktis, kus enne.

Läätse kaugus anuma põhjast on $l = 10$ cm. Olgu läätse optiline tugevus õhus D ja fookuskaugus õhus $f = \frac{1}{D}$. Tema optiline tugevus vees olgu D_v. Läätse fookuskaugus vees peab selleks, et kiired pärast peegeldumist samas punktis kooonduksid, olema $2l - f = \frac{1}{D_v}$. Valemi põhjal saame, et

$$\frac{D_v}{D} = \frac{f}{2l-f} = \frac{\frac{n_k-n_v}{n_v}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}{\frac{n_k-n_0}{n_0}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)} = \frac{n_k n_0 - n_0 n_v}{n_k n_v - n_0 n_v}$$

$$f(n_k n_v - n_0 n_v) = (2l - f)(n_k n_0 - n_0 n_v)$$

$$n_k n_v f - n_0 n_v f = 2l n_k n_0 - 2l n_0 n_v - n_k n_0 f + n_0 n_v f$$

$$f(n_k n_v + n_k n_0 - 2n_0 n_v) = 2l n_0 (n_k - n_v)$$

$$f = \frac{2l n_0 (n_k - n_v)}{n_k n_v + n_k n_0 - 2n_0 n_v}$$

Seega on läätse fookuskaugus

$$f = \frac{2 \cdot 10\text{cm} \cdot 1{,}0 \cdot (1{,}49 - 1{,}33)}{1{,}49 \cdot 1{,}33 + 1{,}49 \cdot 1{,}0 - 2 \cdot 1{,}0 \cdot 1{,}33} = 3{,}94\,\text{cm} \approx 4\,\text{cm}.$$

4. (*KAHEOSALINE PENDEL*) (*8 p.*) *Autor: Hans Daniel Kaimre*

Niidis kaob tõmbejõud, kui raskusjõu niidisuunaline komponent saab võrdseks tsentrifugaaljõuga. Märgistame nurga niidi ning horistontaaljoone vahel θ-ga. Tsentrifugaaljõud avaldub kui $F_t = mv^2/r = 2mv^2/l$ ning raskusjõu niidisuunaline komponent $F_r n = mg\sin\theta$. Need peavad võrduma, seega:

$$\frac{2mv^2}{l} = mg\sin\theta \Rightarrow v^2 = \frac{gl\sin\theta}{2}$$

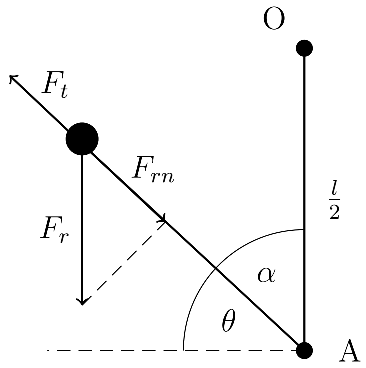
Võttes potentsiaalse energia nivoo nullpunktiks asendi 2, saame et kuuli energia asendis 1 on $E_1 = mgl$. Asendis 3 on aga kuulikese energia

$E_3 = mv^2/2 + mg(1+\sin\theta)l/2$. Kuna kehtib energia jäävuse seadus, peab kehtima $E_1 = E_3$:

$$mgl = \frac{mv^2}{2} + mg(1+\sin\theta)\frac{l}{2} \Rightarrow v^2 = gl(1 - sin\theta)$$

Pannes kaks avaldist v^2 jaoks omavahel võrduma, saame:

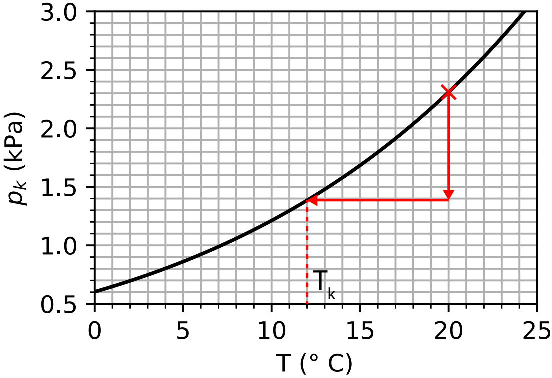
$$\frac{gl\sin\theta}{2} = gl(1 - sin\theta) \Rightarrow \frac{3}{2}\sin\theta = \frac{3}{2}\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{2}{3}$$



5. (*SOOJUSTUS*) (*10 p.*) *Autor: Ardi Loot*

Toas oleva niiske õhu levikut piirab soojustuskihtide vahel olev kile. Selleks, et vältida kondenseerumist, ei tohi kile asukohas temperatuur langeda alla kastepunkti.

Kastepunkti saame leida graafiku alusel, leides alguses küllastunud veeauru osarõhu toatemperatuuril, arvutades sellest $\eta_1 = 60\,\%$ ja seejärel leides sellele vastava kastepunkti $T_k = 12{,}0\,°\mathrm{C}$.



Järgmiseks on vaja leida avaldis temperatuuri jaoks kile asukohas (T). Eeldades, et temperatuur muutub soojustuskihis lineaarselt kaugusega ja muutuse kiirus on pöördvõrdeline soojusjuhtivusega, saame liikudes seest välja kirja panna kaks võrrandit

$$\begin{cases} T = T_1 - \frac{\alpha}{k_1} L_1 \\ T_2 = T - \frac{\alpha}{k_2} L_2 \end{cases} \tag{1}$$

kus α on tundmatu võrdetegur. Nende võrrandite lahendamine annab

$$T = \frac{k_2 T_2 L_1 + k_1 T_1 L_2}{k_2 L_1 + k_1 L_2}. \tag{2}$$

Ja lõpetuseks, tuleb leida sisemise soojustuskihi paksus L_1 piirjuhul, kui kile temperatuur võrdub kastepunktiga

$$L_1 = L \frac{k_1 (T_1 - T_k)}{k_1 T_1 - k_2 T_2 - (k_1 - k_2) T_k} \approx 7{,}8\,\mathrm{cm} \tag{3}$$

ja kondenseerumise vältimiseks peab sisemise soojustuskihi paksus olema sellest väiksem.

6. (*PENDEL*) (*10 p.*) *Autor: Jonatan Kalmus*

Kuna liikumine toimub vaid vertikaalsihis võtame x-teljeks vertikaalsihi suunaga alla. Algsest jõudude tasakaalust saame:

$$Mg = kx_0$$

Kust kuuli algkõrgus $x_0 = \frac{Mg}{k}$ on kaugus vedru tasakaaluasendist ilma kuuli lisaraskuseta. Teame, et vedru otsa asetatud kuuli pool võnkeperioodi on:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

On selge, et see ei sõltu gravitatsioonivälja tugevusest. Kuna nii gravitatsioonivälja kui elektrivälja poolt tekitatud jõud käituvad analoogselt, võime järeldada, et võnkeperiood ei sõltu ka elektrivälja tugevusest ning jääb konstantseks. Seega muudab elektrivälja jõud vaid kuuli tasakaaluasendit iga kord, kui kuul muudab oma liikumissuunda (sest ülesandes on öeldud, et elektriväli on alati kuuli liikumise suunas) ehk iga poole võnkeperioodi τ järel. Alla liikumisel on elektriväli suunatud alla ning saame kirja panna uue jõudude tasakaalu:

$$Mg + Eq = kx_{\downarrow}$$

Kust tasakaaluasend alla liikumisel:

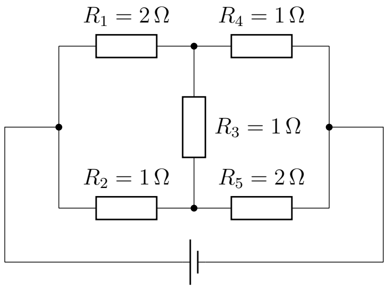
$$x_{\downarrow} = \frac{Mg}{k} + \frac{Eq}{k} = x_0 + \Delta x$$

Analoogselt saame leida tasakaaluasendi üles liikumisel, kuid nüüd on elekriväli suunatud üles:

$$x_{\uparrow} = \frac{Mg}{k} - \frac{Eq}{k} = x_0 - \Delta x$$

On selge, et algselt elektrivälja sisselülitamisel, kui elektriväli on alla suunatud, muutub tasakaaluasend hetkeliselt vastavaks, kuid kuuli asukoht jääb algselt samaks. Seega pole kuul enam tasakaalus, vaid uuest tasakaaluasendist kaugusel Δx ning hakkab võnkuma amplituudiga $A_1 = \Delta x$ tasakaaluasendi $x_{\downarrow}$ ümber. Aja τ järel on kuul jõudnud kaugusele $x_0 + 2\Delta x$. Kuna kuul hakkab nüüd üles liikuma, muutub ka kuuli tasakaaluasend koos elektriväljaga vastavaks ning üles minnes võngub kuul juba amplituudiga $A_2 = 3\Delta x$ tasakaaluasendi $x_\uparrow$ ümber. On selge, et iga tasakaaluasendi vahetumisega kasvab kuuli amplituud edaspidi $2\Delta x$ võrra. Tasakaaluasend vahetub aga iga ajavahemiku τ järel. Nüüd leiame kuuli asukoha ülesandes antud ajahetkel, milleks on 7τ. Selle aja jooksul liigub kuul korra algasendist alla, ning teeb siis 3 täisvõnget, jõudes nende järel uuesti alla. Pärast algasendist alla jõudmist on kuuli asukoht $x_0 + 2\Delta x$. Seejärel liigub kuul üles asendisse $x_0 - 4\Delta x$ ja uuesti alla asendisse $x_0 + 6\Delta x$. Kauguse aboluutväärtus algasendist suureneb seega iga τ järel $2\Delta x$ võrra. 7τ järel on kaugus tasakaaluasendist seega $7 \cdot 2\Delta x = 14\Delta x$. Nagu enne selgeks tegime, on kuul seega küsitud ajahetkel 7τ algasendist x_0 $14\Delta x = 14\frac{Eq}{k}$ võrra all pool.

7. (*TAKISTUSTE TUVASTAMINE*) (*10 p.*) *Autor: Eero Vaher*



Elektrivoolul on võimalik ahelat läbida kolmel moel: läbi ülemise haru (takistid R_1 ja R_4), läbi keskmise haru (takistid R_2, R_3 ja R_4) ning läbi alumise haru (takistid R_2 ja R_5). Pingelang igal takistil on võrdne selle takistuse ning seda läbiva voolutugevuse korrutisega ning pingelangude summa kõigil kolmel teekonnal peab olema võrdne pingega vooluallikal. Niisiis $I_1R_1 + I_4R_4 = I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 = I_2R_2 + I_5R_5 = U_0$. Neist võrranditest saab tuletada avaldised $I_1R_1 = I_2R_2 + I_3R_3$ ning $I_3R_3 + I_4R_4 = I_5R_5$, mis kirjeldavad pingelange skeemi vasakul ning paremal poolel. Lisaks saame panna kirja võrrandid voolutugevuste jaoks: $I_1 = I_0 - I_2$, $I_4 = I_1 + I_3$ ning $I_5 = I_2 - I_3$.

Paneme tähele, et kui $R_1 = R_2$ ja $R_4 = R_5$, siis sümmeetriakaalutlustel peaks kehtima $R_3 = 0$.

On ilmne, et $R_3 = 1\,\Omega$. Oletame esmalt, et $R_1 = R_4 = R_3$. Sellisel juhul avaldub pingelang ülemises harus kujul $(2I_1 + I_3)R_3 = U_0$, millest järeldub $I_1 = 6\,\mathrm{A}$ ning $I_2 = 4\,\mathrm{A}$. Vaadeldes voolu teekonda läbi keskmise haru saame kirjutada $I_2R_2+U_3+(I_1+I_3)R_3 = U_0$, millest saab järeldada $R_2 = R_5 = 1\,\Omega$. Selline skeem rahuldab eespool mainitud sümmeetriat, seega tehtud eeldus pole tõene.

Oletame nüüd, et $R_2 = R_5 = R_3$. Skeemi alumise haru jaoks saame kirjutada $(2I_2 - I_3)R_3 = U_0$ ehk $I_2 = 8\,\mathrm{A}$ ning $I_1 = 2\,\mathrm{A}$. Pingelangud skeemi vasakus pooles peavad rahuldama võrrandit $I_1R_1 = (I_2 + I_3)R_3$, millest järeldub $R_1 = 5\,\Omega$. Sellisel juhul on aga pingelang skeemi ülemisel harul $(2I_1 + I_3)R_1 = 30\,\mathrm{V} \neq U_0$.

Oletame nüüd, et $R_1 = R_5 = R_3$. Pingelang skeemi keskmisel harul on $I_2R_2 + U_3 + (I_0 - I_2 + I_3)R_2 = U_3 + (I_0 + I_3)R_2 = U_0$ ehk $R_2 = R_4 = 1\,\Omega$. Tegemist on juba vaadeldud juhuga.

Ainus järelejäänud võimalus on $R_2 = R_4 = R_3$. Skeemi vasakust poolest saame $(I_0-I_2)R_1 = I_2R_3+U_3$, paremast $(I_2-I_3)R_1 = U_3+(I_0-I_2+I_3)R_3$. Nende põhjal $(I_0 - I_3)R_1 = 2U_3 + (I_0 + I_3)R_3$ ehk $R_1 = 2\,\Omega$. On lihtne veenduda, et leitud väärtused rahuldavad kõiki võrrandeid pingelangude jaoks.

8. (*KERKIV ÕHUPALL*) (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Seni kui heelium pole võtnud enda alla veel kogu õhupalli ruumala püsib tõstejõud konstante. Tõepoolest, $F = \rho_a g V_p$, kus ρ_a on õhu tihedus ja V_p — pallis oleva gaasi ruumala. Paneme tähele, et seni kui palli nahk ei ole pinguldunud, on pallis oleva gaasi rõhk ja temperatuur võrdsed antud hetkel palli ümbritseva õhu rõhu ja temperatuuriga. Et $\rho_a = p\mu/RT$, kus p ja T tähistavad rõhku ja temperatuuri antud kõrgusel, ja samal ajal $V_p = \frac{mRT}{p\mu_p}$ (kus μ_p tähistab heeliumi molaarmassi ning m selle kogumassi), siis üleslükkejõud $F = \rho_a V_p g = mg\frac{\mu}{\mu_p}$.

Üheprotsendiline vähenemine on nii väike, et me võime lugeda otsitava kõrguse võrdseks kõrgusega, kus eelpooltoodud tulemuseni jõudmiseks tehtud eeldus heeliumi ruumala kohta enam ei kehti, st see võrdsustub V_0-ga. Gaasi olekuvõrrand ütleb, et $V \propto T/p$ ($\propto$ tähistab võrdelisust); arvestades, et pallis oleva heeliumi ja ümbristeva õhu temperatuurid ja rõhud on võrdsed, võime järeldada, et see on kõrgus, mille juures on õhu jaoks suhe T/p kasvanud 2 korda võrreldes maapinnalähedase olukorraga.

Mõttelise õhuruumala V jaoks on suhe T/p võrdeline V-ga. Seega peab mõttelise õhuruumala kerkimisel maapinnalt antud kõrguseni selle ruumala kasvama kaks korda. Et tegemist on adiabaatilise atmosfääriga, siis õhuruumala V kerkimisel järgivad selle karakteristikud adiabaadiseadust pV^γ =constant; kombineerides seda ideaalse gaasi seadusega pV/T =constant saame $V^{\gamma-1}T$ =constant. Et V peab kasvama 2 korda, siis T peab kahanema $2^{\gamma-1} = 2^{0.4}$ korda. Seega $\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g h}{R} = T_0(1-2^{-0.4})$, millest $h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{\mu g}T_0(1-2^{-0.4}) \approx 7250\,\mathrm{m}$.

9. (*KONDENSAATOR*) (*12 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Teises staadiumis eralduv soojus on võrdne kondensaatori energiaga lüliti avamise hetkel, $Q_2 = q_C^2/2C$, kus q_C on kondensaatori laeng sel hetkel. Kogu vabanev soojusenergia on võrdne patarei kogutööga $A = (q_C + q_R)\mathcal{E} = Q_1 + Q_2$, kus q_R on otsitav lampi läbiv laeng. Seega $q_R = \frac{Q_1+Q_2}{\mathcal{E}} - \sqrt{2CQ_2}$.

10. (*KAKS KUULI*) (*14 p.*) *Autor: Jaan Kalda*

Elektriväli indutseerib kuulidele vastasmärgilised laengud, mis tagavad, et kuulide potentsiaalid on võrdsed. Olgu esimese kuuli koordinaat z; siis väline väli tekitab kuulide vahel potentsiaalide vahe Ez; see peab võrduma kuulidele indutseeritud laengute $\pm q$ tekitatud potentsiaalide vahega $kq/R-(-q)k/R = 2kq/R$. Seega $q = EzR/2k$. Esimesele kuulile mõjub elektriväljas jõud $Eq = E^2zR/2k$; näeme, et see on võrdeline kaugusega ja toimib sarnaselt vedrule. Seega teeb summaarne jõud tööd $E^2z^2R/4k$. Kui ka teine kuul siseneb elektrivälja, siis muutub summaarne jõud hetkeliselt nulliks ning kuulid jätkavad liikumist konstantse kiirusega, mis on leitav energia jäävuse seadusest: $E^2z^2R/4k = 2mv^2/2$, millest $v = \frac{Ez}{2}\sqrt{\frac{R}{km}}$. Seni kui kuulid kiirenevad, on liikumisvõrrandiks $\ddot{z} = E^2z^2R/4km$, millest nii z kui $v = \dot{z}$ on eksponentsiaalsed funktsioonid ajast. Seega on kiiruse graafikuks eksponentisaalselt kasvav kõver, mis läheb hüppeliselt üle kontsantseks funktsiooniks (hetkel, kui ka teine kuul siseneb elektrivälja).

E1 (*KLOTSI MASS*) (*10 p.*) *Autor: Erkki Tempel*

Kinnitame kumminiidi mõlemasse otsa niidid. Ühe niidi otsa kinnitame klotsi külge

Hoiame niidi otsast kinni ning venitame klotsiga kumminiidi välja. Laseme kumminiidi lahti ning mõõdame teepikkuse, mille klots läbib.

Lisame klotsile 100 grammise raskuse ning venitame uuesti kumminiidi samaplaju välja, kui esimesel juhul ning laseme lahti ja möödame samuti klotsi poolt läbitud teepikkuse.

Kumminiidi energia E_p kandub mõlemal juhul üle kotsile ning hõõrdejõud teeb klotsi pidurdamisel tööd $A = F_h s = \mu mgs$. Kuna hõõrdetegur

μ on mõlemal katsel sama, saame avaldada masside suhte esimese ja teise katse jaoks järgmiselt

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{s_2}{s_1} \qquad \Rightarrow \qquad m_{klots} = \frac{100\,\mathrm{g} \cdot s_2}{s_1 - s_2}$$

E2 (*MUST KAST*) (*14 p.*) *Autor: Jaan Kalda/Eero Uustalu*

Kolm elementi on mustas kastis tähtühenduses. Sellest arusaamiseks paneme tähele, et ainult ühe klemmipaari puhul ei lähe vool pika aja möödudes nulli. Märgime ära stabiliseeruva voolutugevuse I nende klemmide vahel. Kasutades multimeetrit voltmeetrina, mõõdame nende klemmide vahelise pinge - see võrdub patarei elektromotoorjõuga $\mathcal{E}$. Nendest mõõtmistest saame leida Ohmi seaduse abil takisti takistuse ja patarei sisetakistuse summa:

$$R + r = \frac{\mathcal{E}}{I}$$

Eraldi takistuse leiame, kui laadida esmalt kondensaator täiesti täis (ampermeetriga saab kontrollida laadimisvoolu vähenemist) ja siis ühendada läbi ampermeetri takistile (st ühendada ampermeetriga kaks vastavat väljundklemmi): esimese hetke lugem annab voolu, kui takistil on patarei pinge. Kondensaatori mahtuvuse leidmiseks mõõdame stopperiga aega ning konstrueerime tühjenemisvoolu graafiku $I\,(t)$. Selle graafiku alune pindala võrdub kondensaatori algse laenguga Q. Siit kondensaatori mahtuvus $C = Q/U$. Alternatiivselt saame kondensaatori mahtuvuse, kui mõõdame voolutugevuse kahel ajahetkel ja kasutame seost kondensaatori tühjenemisvoolu kohta: $I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.