Eesti koolinoorte 66. füüsikaolümpiaad

06. aprill 2019. a. Vabariiklik voor.

Gümnaasiumi *ülesannete lahendused*

1. (*AUTOD*) (*6 p.*) Kuna autod jäävad seisma samaaegselt, siis läheme ühe ühe autoga seotud taustsüsteemi. Autode suhteline kiirus üksteise suhtes on $v = v_1 + v_2 = 180\,\mathrm{km/h} = 50\,\mathrm{m/s}$
Autode pidurdusteekond on kokku $2 = 600\,\mathrm{m}$ ning lõppkiirus on $0\,\mathrm{m/s}$, siis pidurdamiseks kulunud aeg on

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{2s}{v + v_0} = 24\,\mathrm{s}$$

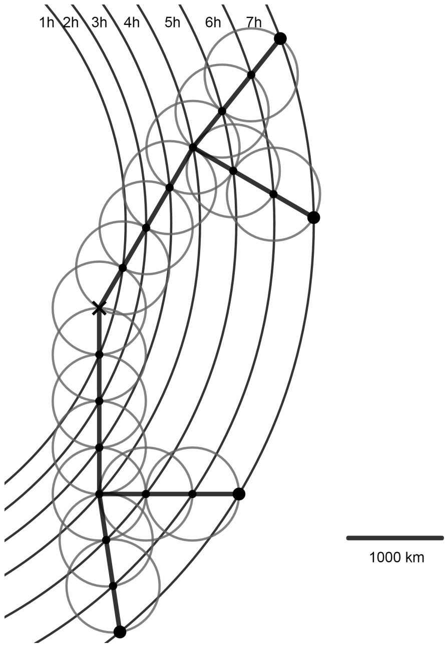
2. (*SAUNAUKS*) (*8 p.*) Saunakerisele visatud vee aurustamine lisas saunaruumi rõhu:

$$p = \frac{\rho V_v}{\mu} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{200}{18} \cdot \frac{8{,}314 \cdot 373}{3 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}4} \approx 1914\,\mathrm{Pa}.$$

kus me kasutasime teadmist, et auru temperatuur $T = 373\,\mathrm{K}$. Saunaukse pindala $S_u = 0{,}7 \cdot 1{,}9 = 1{,}33\,\mathrm{m}^2$ ning talle mõjub jõud $F = pS_u \approx 2546\,\mathrm{N}$. Selleks, et leili rõhk ust lahti ei teeks, peab ukse hingedele mõjuv hõõrdejõu moment olema vähemalt:

$$\tau = Fl = 2546 \cdot \frac{0{,}7}{2} \approx 891\,\mathrm{N/m}.$$

3. (*LENNUK*) (*8 p.*) Teame, et suured ringjooned märgivad lennuki asukohta iga tunni järel ning ühe tunniga läbib lennuk 500 km. Joonisel oleva mõõtkava järgi saame 500 km vastava pikkuse joonisel. Võtame selle pikkuse ja joonestame sirkliga vastava raadiusega ringjoone lennuki algasukoha ümber. See ringjoon märgib lennuki asukohta 1h pärast õhkutõsu ning selle lõikepunktid olemasoleva esimese suure ringjoonega (mis märgib samuti lennuki asukohta 1 h pärast õhkutõsu) annavad meile lennuki võimalikud asukohad 1 h pärast. Kuna me ei tea, millises suunas lennuk lendas, peame lennuki teekonda mõlemast punktist edasi konstrueerima, joonestades uute punktide ümber samuti 500 km vastava ringjoone. Kuna aga teame, et lennuk lendas 4 h järjest otse, saame hakata lõikepunkte välistama, sest sobivad punktid moodustavad sirge. 4 h vastava ringjoone juures teame vaid seda, et lennuk muutis suunda. Seega saame kummagi algse teekonna kohta veel 2 võimalikku uut suunda (kokku 4 võimalikku suunda). Teades, et lennuk lendas edaspidi samuti vaid otse, saame kõik 4 teekonda lõpuni konstrueerida.



4. (*KONVEIER*) (*8 p.*) Olles täielikult esimesel lindil, on plaadi kiirus v_1 ning teisel lindil v_2. Plaadi kiirus muutub üleminekukohas v_1-lt v_2-le, kui hõõrdejõud teise konveierilindiga ületab hõõrdejõu esimese konveierilindiga. Olgu plaadi mass M ning plaadi joontihedus piki konveierit $\rho = M/l$. Piirjuhul saame hõõrdejõudude võrdsusest:

$$\mu_1 M_1 g = \mu_2 M_2 g$$

kus M_1 ja M_2 on vastavalt esimese ja teise lindi peal oleva plaadi osa massid. Olgu esimesel lindil oleva osa pikkus l_1 ning teisel osal l_2. Kasutades joontihedust saame:

$$\mu_1 \rho l_1 g = \mu_2 \rho l_2 g$$

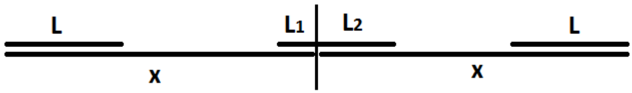
. Taandades ühised kordajad saame võrrandisüsteemi:

$$\mu_1 l_1 = \mu_2 l_2$$

$$l_1 + l_2 = l$$

Siit saame avaldada l_1-e:

$$l_1 = \frac{l}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$



Joonisel on kujutatud plaadi algasend, lõppasend ning piirjuht, kus kiirus muutub (tühiselt väikese aja jooksul). Algasendist piirjuhuni läbib plaat vahemaa $x - l_1$ kiirusel v_1. Piirjuhust lõppasendini läbib plaat vahemaa $x - l_2$ kiirusel v_2. Seega koguaeg:

$$t = \frac{x - l_1}{v_1} + \frac{x - l_2}{v_2}$$

Asendades saame:

$$t = \frac{v_2 x - v_2 l_1 + v_1 x - v_1 l_2}{v_1 v_2} =$$

$$\frac{x(v_1 + v_2) - l v_1 - l_1 v_2 + l_1 v_1}{v_1 v_2} =$$

$$\frac{x(v_1 + v_2) - l v_1 + \frac{l(v_1 - v_2)}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}}{v_1 v_2}$$

5. (*JÄÄKEEGEL*) (*10 p.*) Esmalt veendume selles, et esialgu liikuva kivi märklaua keskele jõudmiseks peab kivide vahel toimuma tsentraalne otsepõrge. Oletame vastuväiteliselt, et liikuva kivi trajektoori pikendus ei läbi enne põrget seisva kivi massikeset, vaid möödub sellest näiteks paremalt poolt (liikumise sihis vaadatuna). Kuna kivide ristlõiked on ringikujulised ja eeldame, et kivi massikese asub ringi keskel, siis mõjuvad kivide vahel põrke ajal jõud piki nende massikeskmeid ühendavat sirget. Jagades liikumatu kivi poolt liikuvale kivile avaldatava jõu kaheks komponendiks, millest üks on piki kivi esialgset trajektoori ja teine sellega risti, näeme et jõu ristikomponent on suunatud liikumise sihist paremale. Seega pöördub liikuva kivi trajektoor põrke tulemusel veel rohkem paremale ja ei saa läbida märklaua keskpunkti. Järelikult peab ülesande tingimuste täitmiseks toimuma tsentraalne otsepõrge ja saame järgnevalt olukorda vaadelda ühemõõtmelisena.

Märklaua keskele jõudmiseks peab esialgu liikuv kivi pärast põrget teatud kiirusega edasi liikuma ja seejärel jääga hõõrdumise tõttu seisma jääma. Tähistame kiirused: v_0 ja v – esialgu liikuva kivi kiirus enne ja pärast põrget ning u – esialgu seisva kivi kiirus pärast põrget. Impulsi jäävuse seadusest:

$$mv_0 = mv + mu, \tag{1}$$

kus m on kivi mass, mis nagu näha välja taandub. Samuti saame kirjutada energia jäävuse seaduse

$$(1-\eta)\,\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2}, \tag{2}$$

kus $\eta = 0{,}4$ on põrkel kaduma läinud energia osakaal.

Kiiruse v jaoks kehtib tingimus

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgs, \tag{3}$$

ehk esialgu liikuva kivi kineetiline energia pärast põrget on võrdne hõõrdejõu tööga kivi seismajäämisel. Põrke hetkel on esialgu liikuva kivi keskkoha kaugus märklauast võrdne kivi läbimõõduga ehk $s = D$ ja $v = \sqrt{2\mu gD}$.

Kiiruse v_0 leidmiseks avaldame impulsi jäävuse seadusest $u = v_0 - v$ ja asetame selle energia jäävuse avaldisse:

$$(1-\eta)\,v_0^2 = v^2 + (v_0 - v)^2\,, \tag{4}$$

millest

$$\eta v_0^2 - 2v_0 v + 2v^2 = 0. \tag{5}$$

Saadud ruutvõrrandi lahend on

$$v_0 = \frac{v\,(1 \pm \sqrt{1-2\eta})}{\eta} \tag{6}$$

ehk kasutades eelnevalt leitud v avaldist, saame

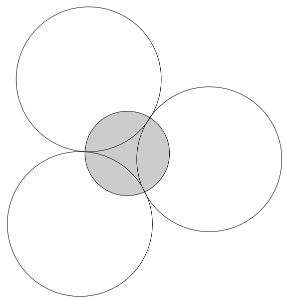
$$v_0 = \frac{\sqrt{2\mu g D}\,(1 \pm \sqrt{1-2\eta})}{\eta}. \tag{7}$$

Vastavalt märgile ruutvõrrandi lahendi valemis saaksime kiirusteks

	$+$	$-$
v_0	1,22 m/s	0,47 m/s
v	0,34 m/s	0,34 m/s
u	0,88 m/s	0,13 m/s

Kuna kivid ei saa pärast põrget üksteisest läbi minna, siis peab kehtima $u > v$ ja füüsikaliselt sobib ainult pluss-märgiga lahend ehk kivi kiirus enne põrget on $v_0 = 1{,}2\,\mathrm{m/s}$.

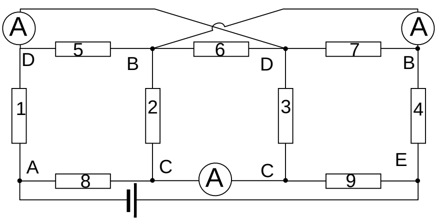
6. (*LÕKS*) (*10 p.*) Kuulikese trajektoor silindris koosneb kolmest kaarejupist nii nagu näidatud joonisel. Nagu jooniselt näha, igale kaarejupile vastav kesknurk on 60 kraadi, seega trajektooride kesknurkade summa on pool täisringist, st kuulike veedab silindris pool tsüklotronperioodist $t = T/2 = \pi \frac{m}{qB}$.

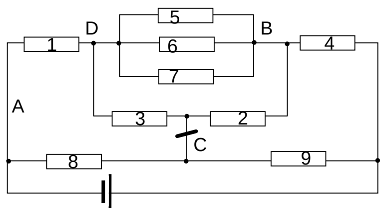


7. (*3 RUUTU*) (*10 p.*) Lihtsustame skeemi arvestades sellega, et ideaalsete ampermeetrite sisetakistus on null: me võime lühistada need sõlmpunktid, mis on ühendatud juhtmega läbi ampermeetri. Selleks, et olla kindel vigadeta skeemi teisendamises tähistame takistid numbritega ja sõlmpunktid tähtedega, vt esimene joonis. Paneme tähele, et Kirchoffi vooluseaduse tõttu näitavad ampermeetrid vastavalt esimese ja viienda, seitsmenda ja neljanda ning kaheksanda ja neljanda takisti voolude vahet.

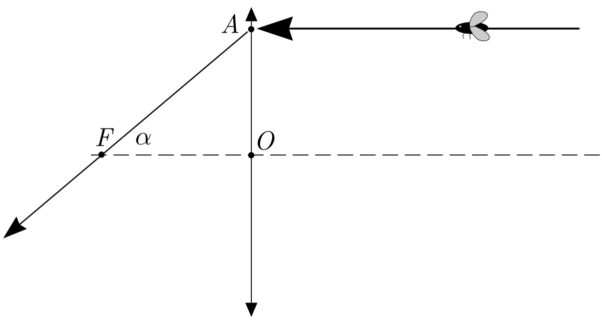
Seejärel alustame sõlmpunktide märkimisest ja ühendame need samade takistitega, mis algseski skeemis, tulemus on näidatud teisel joonisel. Viimase sammuna jagame sõlmpunkti C kaheks osaks lõigates mõtteliselt läbi joonise sümmeetriateljel oleva vertikaalse juhtme; seda võib teha, sest sümmeetria tõttu puudub selles vertikaalses juhtmes vool. Nüüd on juba lihtne leida takistite voolud: takistitest 8 ja 9 koosneva ahela kogutakistus on $r_8 = 6\,\Omega$, seetõttu läbib neid vool $i_8 = \mathcal{E}/r_8 = 8\,\text{A}$. Punktide B ja D vahelise viiest takistist koosneva ahelajupi takistus on $\frac{6}{7}\Omega$ ning seega ülemise ahelapoole kogutakistus on $r_1 = \frac{48}{7}\Omega$ ja takisti 1 vool $i_1 = \mathcal{E}/r_1 = 7\,\text{A}$. Seega langeb takistite 1 ja 7 peale kokku pinge $2i_1R = 42\,\text{V}$, mistõttu sõlmede B ja D vaheline pinge on $V_5 = \mathcal{E} - 2i_1R = 6\,\text{V}$. Järelikult on takisti 5 vool $i_5 = V_5/R = 2\,\text{A}$ ja takisti 2 vool $i_2 = V_5/(2R) = 1\,\text{A}$.

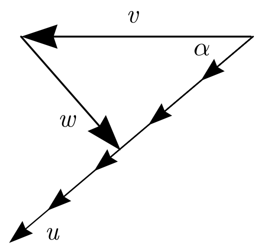
Niisiis on vasakpoolse ülemise ampermeetri vool $i_8 = i_1 - i_5 = 5\,\text{A}$ ning sümmeetria tõttu näitab sama voolutugevust ka parempooolne ülemine ampermeeter. Alumise ampermeetri näit on $i_8 - i_2 = 7\,\text{A}$.





8. (*KÄRBES*) (*12 p.*) Kui kärbes liigub mööda joonisel näidatud horisontaalset sirget, mis lõikub läätsega punktis A ja alustab liikumist väga kaugelt, siis kärbse kujutis liigub mööda kaldjoont, mis läbib punkti A ja fookust F (sest sirge kujutis on sirge ja need kaks sirget lõikuvad läätse tasandis) ning alustab liikumist punktist F eemaldudes alguses väga aeglaselt. Kujutise kiirus kasvab monotoonselt kuni jõuab lõpmatusse hetkel, mil kärbes läbib fokaaltasandi. Seega, kui kärbse kiirust kujutab horisontaalne vektor v parempoolsel joonisel, siis kujutise kiiruse vektor erinevatel ajahetkedel on kujutatud kaldus olevate vektoritena u. On ilmne, et nende kahe vektori vahe w on minimaalne siis, kui vektor w on risti vektoriga u. Seega saame $u_{\min} = v \sin\alpha$. Kolmnurga OAF põhjal $\sin\alpha = a/\sqrt{a^2+f^2}$ ning $u_{\min} = va/\sqrt{a^2+f^2}$.





9. (*NIIT JA POOLSFÄÄR*) (*12 p.*) Et kera on maandatud, siis selle keskpunkti potentsiaal on 0. Superpositsiooniprintsiibi abil saame selle avaldada kui kera pinnale indutseeritud laengute Q_i ja rõngal olevate laengute q_j panuste summa: $0 = \sum_i kQ_i/R + k\sum_j kq_j/l$, kus $l = \sqrt{r^2+d^2}$ on rõnga punktide kaugus kera keskpunktist. Summas saab konstandid sulgude ette tuua: $0 = \frac{k}{R}\sum_i Q_i + \frac{k}{l}\sum_j q_j = kQ/R + kq/l$, seega $Q = -qR/\sqrt{r^2+d^2}$.

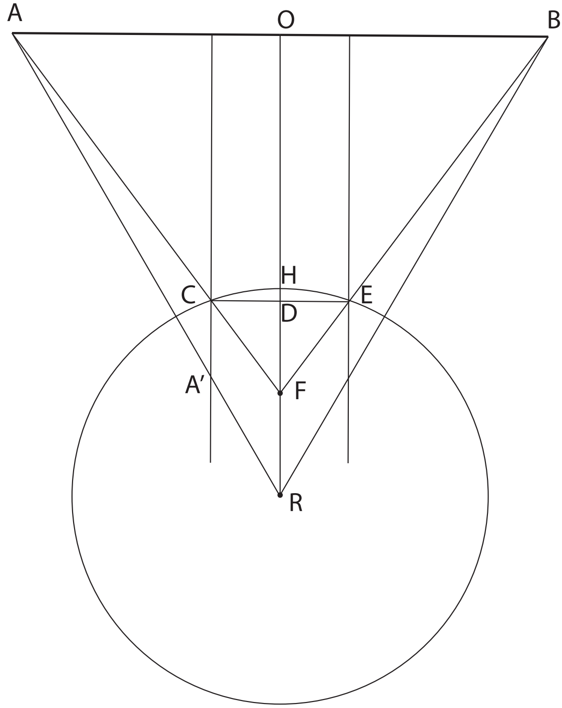
10. (*PÖÖRDUV ELEKTRIVÄLI*) (*12 p.*) Et osakese x-telje sihiline keskmine kiirus v_x oleks null, peab ajaperioodidel $4nT+T \le t < 4nT+2T$ ja $4nT+3T \le t < 4nT+4T$ olema v_x väärtused võrdsed ja vastasmärgilised, vastavalt u ja $-u$; ajavahemikul $4nT+2T \le t < 4nT+3T$ annab elektriväli osakesele x-suunalise impulsi $-E_0qT$, seetõttu

$$2mu = E_0qT \quad \Rightarrow \quad u = \frac{E_0qT}{2m}.$$

Järgneva veerandperioodi jooksul püsib osakese x-sihiline kiirus konstantselt võrdne u-ga ning seega nihkub osake sel ajal x-telje sihis $x_1 = uT$ võrra. Järgneva kaheksandikperioodi jooksul (ketusega $T/2$) kahaneb kiirus lineaarselt ajas nullini, seetõttu on täiendav nihe leitav keskmise kiiruse $\frac{u}{2}$ abil, $x_2 = \frac{u}{2} \cdot \frac{T}{2} = uT/4$; sümmeetria tõttu toimus samasugune nihe ka konstantse kiirusega veerandperioodile eelenenud kaheksandikperioodi jooksul, st kogunihe (ja seega trajektoori x-telje sihiline läbimõõt) on

$$x_1 + 2x_2 = \frac{3}{2}uT = \frac{3E_0qT^2}{4m}.$$

Sümmeetria tõttu on y-telje sihiline läbimõõt samasugune. Trajektooriks on kujund, mis koosneb neljast paraboolist — iga järgmine parabool on saadud eelmisest täisnurga võrra pööramisel (paraboolide pikkused peavad olema sellised, et otspunktides oleks tõusnurk 45°: kõverad peavad liituma ilma murdepunktita.



E1. (*KUMERPEEGEL*) (*10 p.*)

Kumerpeegel tekitab kujutise peegli taha. Asetame joonlaua peegli ette nii, et peeglis tekkiv kujutis on täpselt peegli laiune. See võimaldab meil mõõta kujutise suurust. Peegel peab olema meist võimalikult kaugel, et vähendada parallaksist tingitud viga.

Mõõdame joonlaua pikkuse L, peegli diameetri d, joonlaua kauguse peeglist a ning peegli keskpunti kõrguse peegli serva tasapinnst x.

Sarnastest kolmnurkadest $\triangle AOF$ ja $\triangle CDF$ saame kirja panna seose.

$$\frac{AO}{CD} = \frac{OH + HF}{DF}$$

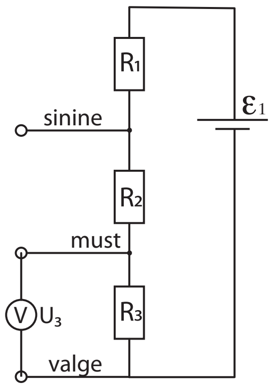
Teades, et $AO = 0{,}5L$, $CD = 0{,}5d$, $OH = a$, $HF = f$ ning $DF = f - x$, saame leida peegli fookuse f

$$f = \frac{da + Lx}{L - d}$$

Suurema peegli (must) korral $f \approx 7{,}7\,\mathrm{cm}$ ning väiksema (kollane) korral $f \approx 16\,\mathrm{cm}$.

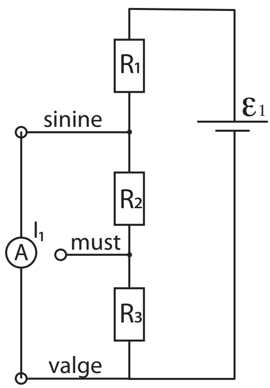
E2. (*MUST KAST*) (*14 p.*)

Ühendame "musta kasti" musta ja valge juhtme vahele voltmeetri. Registreerime pinge U_3 .



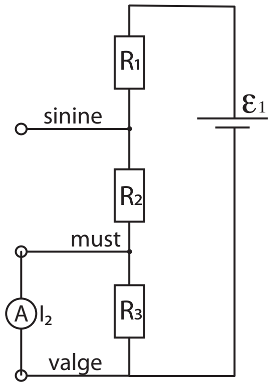
$$\frac{U_3}{R_3} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{1}$$

Seejärel ühendame "musta kasti" sinise ja valge juhtme vahele milliampermeetri (täpsem mikroampermeetri) ja mõõdame vastava voolu I_1:



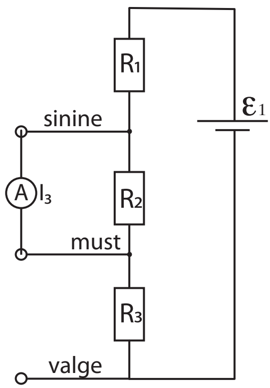
$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \tag{2}$$

Seejärel ühendame "musta kasti" musta ja valge juhtme vahele milliampermeetri (veel täpsem mikroampermeetri) ja mõõdame vastava voolu I_2:



$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} \tag{3}$$

Seejärel ühendame "musta kasti" sinise ja musta juhtme vahele milliampermeetri (veel täpsem mikroampermeetri) ja mõõdame vastava voolu I_3:



$$I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_3} \tag{4}$$

Avaldame me valemites (2) , (3) ja (4) elektromotoorjõu $\mathcal{E}$.

Ühendades valemid (2) ja (3) saame avaldise:

$$I_1 R_1 = I_2 R_1 + I_2 R_2$$

kust omakoda saame avaldada R_2 takisti R_1 kaudu

$$R_2 = \frac{I_1 - I_2}{I_2} R_1 \tag{5}$$

Ühendades aga valemid (2) ja (4) saame avaldise:

$$I_1 R_1 = I_3 R_1 + I_3 R_2$$

kust omakoda saame avaldada R_3 takisti R_1 kaudu

$$R_3 = \frac{I_1 - I_3}{I_3} R_1 \tag{6}$$

Asetades saadud väätrused teisendatud valemisse (1) saame $\mathcal{E}$ väärtuse

$$\mathcal{E} = U_3 \left(\frac{R_1 + R_1 \left(\frac{I_1 - I_2}{I_2}\right) + R_1 \left(\frac{I_1 - I_3}{I_3}\right)}{R_1 \left(\frac{I_1 - I_3}{I_3}\right)} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = U_3 \left(\frac{1 + \left(\frac{I_1 - I_2}{I_2}\right) + \left(\frac{I_1 - I_3}{I_3}\right)}{\left(\frac{I_1 - I_3}{I_3}\right)} \right)$$

Edasi leiame valemitest (5) ja (6) väärtused R_2 ja R_3 ning kasutades valemit (2) arvutame R_1 :

$R_1 = \frac{\mathcal{E}}{I_1}$

Kontrollkatses voltmeetri ja milliampermeetriga mõõdetud väärtused on järgmised:

$$U_3 = 3{,}405\,\mathrm{V} \quad I_1 = 1{,}26\,\mathrm{m}A \quad I_2 = 1{,}022\,\mathrm{m}A \quad I_3 = 0{,}699\,\mathrm{m}A$$

ja sellest tulenevad vastused:

$$\mathcal{E}_1 = 9{,}220\,\mathrm{V} \quad R_1 = 7317\,\Omega \quad R_2 = 1463\,\Omega \quad R_2 = 5142\,\Omega$$

Kui aga mõõta voltmeetri ja mikroampermeetriga, siis:

$$U_3 = 3{,}405\,\mathrm{V} \quad I_1 = 1{,}232\,\mathrm{m}A \quad I_2 = 1{,}022\,\mathrm{m}A \quad I_3 = 0{,}699\,\mathrm{m}A$$

ja sellest tulenevad vastused:

$$\mathcal{E}_1 = 8{,}788\,\mathrm{V} \quad R_1 = 7133\,\Omega \quad R_2 = 1465\,\Omega \quad R_2 = 5439\,\Omega$$

Ülaltoodud vastuste erinevus tuleneb mikoampermeetri suurest (meie takistitega lähedases suurusjärgus) sisetakistuses mida aga kahjuks pole mõõteriista passis märgitud.