

Eesti koolinoorte 67. füüsikaolümpiaad

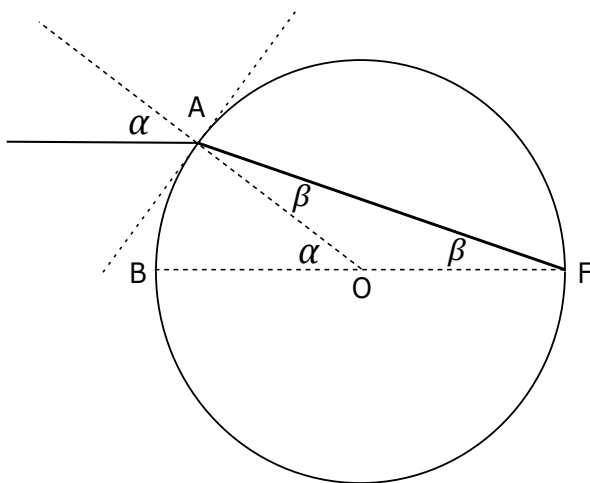
9. juuni 2020. a. Lõppvoor.

Gümnaasiumi ülesannete lahendused

1. (KLAASKERA) (6 p.) Autor: Hans Daniel Kaimre.

Mööda optilist peatelge liikuv kiir ei murdu ning liigub otse läbi kera. Seega koonduvad kõik kiired kera tagumise poole ja optilise peatelje lõikumiskohta. Urime nüüd üht valguskiirt, mis asub vihu tsestrist eemal. Selle konkreetse valguskiire jaoks võib lähendada probleemi kahedimensionaalseks. Joonistame kiire käigu, märgime nurgad. Langemismurk olgu α ning murdumisnurk β , kusjuures need on omavahel seotud Snelli seadusega: $n_{\tilde{o}} \sin \alpha = n_k \sin \beta$. Sarnaste kolmnurkade tõttu $\angle AOB$ on samuti α . Kolmnurk AFO on võrdhaarne (haaradeks kera raadiused) ning seega $\angle AFO$ on β . Ühelt poolt (kolmnurga sisenurkade summa on 180°) $\angle AOF = 180 - 2\beta$, teisalt (kõrvunurkade summa on 180°) $\angle AOF = 180^\circ - \alpha$, seega $\alpha = 2\beta$. Võttes, et $n_{\tilde{o}} = 1$ ning tehes väikeste nurkade lähenduse $\sin x \approx x$, saame:

$$n_{\tilde{o}} \sin \alpha = n_k \sin \beta \Rightarrow \sin 2\beta = n_k \sin \beta \Rightarrow n_k = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} \approx \frac{2\beta}{\beta} = 2.$$



2. (KOHUKESED) (8 p.) Autor: Kaarel Hänni.

Koti mõõtmed on Richardi käe pikkusega võrreldes väikesed, seega võime eeldada, et nurkkiirendus on kõigile kohukestele ühtemoodi $\omega^2 \ell$, kus ℓ on

Richardi käe pikkus. Kohukesed ei kuku kotist välja, seega ringi ülemisest punktist saame $\omega^2 \ell \geq g$. Kohukesed ei lähe alumises punktis l maks, seega rõhk $\rho(g + \omega^2 \ell)h$ pole piisav, et kohukest l mastada. Eelnevast

$$\rho(g + \omega^2 \ell)h \geq \rho g 2h.$$

Seega saaks kotti panna kõrgusega $2h$ kihi kohukesi, ilma et need l maks läheks.

3. (KÄIVITUSVOOL) (8 p.) Autor: Valter Kiisk.

Vasktoru takistus on ilmselt märksa väiksem kui ampermeetri sisetakistus, seega praktiliselt kogu käivitusvool kulgeb läbi vasktoru.

Vasktoru ristlõike pindala (mida vool läbib) on $S = \frac{1}{4}\pi(d_2^2 - d_1^2) = 22 \text{ mm}^2$.  hikulise pikkusega torujupi takistus on $R = \rho/S$. Seega voolutugevusel $I_1 = 500 \text{ A}$ pingelang vasktoru pikkusühiku kohta

$$\delta U = RI_1 = \frac{\rho}{S}I_1 \approx 0,38 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Et läbi ampermeetri tekiks voolutugevus $I_0 = 1 \text{ mA}$, on ampermeetrile tarvis rakendada pinge $U = I_0 R_0 = 0,1 \text{ V}$. Selline pingelang moodustub vasktoru pikkusel $\ell = U/\delta U = 0,26 \text{ m}$.

4. (TASAKAALULIIKUR) (8 p.) Autor: Krister Kasemaa.

Hannese liikumist saab vertikaalsuunas k sitleda vedrupendli v nkumisena. Vedrupendli perioodi valem on:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Kuna meie süsteemil on kaks vedru rööbiti, tuleb võngete perioodi valemit veidi muuta. Kahe kõrvuti oleva vedru jäikus on võrdne ühe vedruga, mille jäikus on eelnevate vedurude j ikuste summaga. Seega on meie süsteemi vertikaalsuunaliste võngete periood:

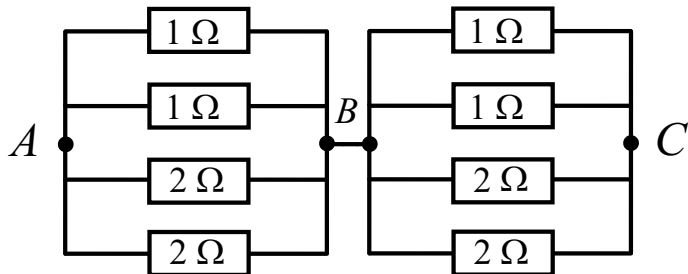
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

Resonants tekib, kui koosinuslaine läbimise sagedus ühtib verikaalse vedrus steemi naturaalsagedusega. Seega peab Hannes $\Delta x = 6 \text{ m}$ võrra edasi liikuma sama ajaga, mil teeb masspendel ühe naturaalsagedusel võnke. Seega, resonantsi tekke kiirus:

$$v_{\text{resonants}} = \frac{\Delta x}{T} = \frac{\Delta x}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = 4,678 \text{ ms}^{-1} \approx 4,7 \text{ ms}^{-1}$$

5. (GLOOBUS) (10 p.) Autor: Rael Kalda.

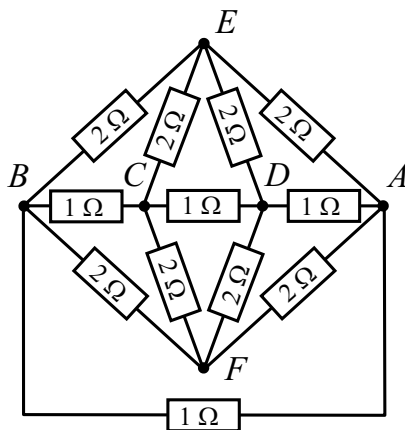
a) Pöördsummeerituse tõttu on näha, et väljundklemmide A ja C vahele jäävatel sõlmedel on kõigil sama potentsiaal. Seega võib need neli sõlme kokku ühendada ja saame kaks järjestikust neljatakistilist rööbitiühendust:



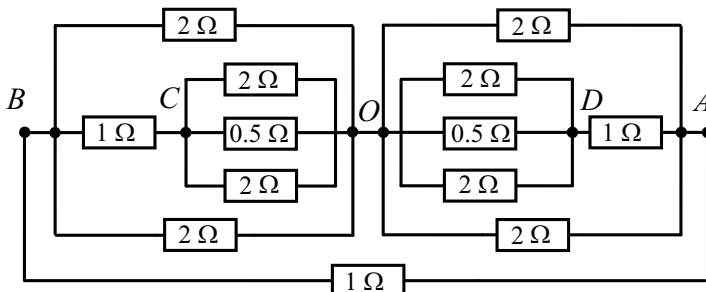
Takistus A ja C vahel on seega:

$$2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{1}} \Omega = \frac{2}{3} \Omega.$$

b) Variant 1: Kerast on võimalik saada ekvivalentne skeem:



kus on lisatud veel sõlmede tähised D , E ja F . Kuna sõlmedel E ja F on sama potentsiaal, saame need kokku ühendada sõlmeks O , nagu järgneval skeemil. Sel juhul on sõlmega O ühendatud neli takisti paari, kus üks paar, mis koosneb kahest rööbiti ühendatud 2-oomisest takistist, annab kokku tavalise 1-oomise takisti:



mille kogutakistuse välja arvutamisel saame samuti $\frac{8}{15} \Omega$.

6. (PALLIVISKENÕLV) (10 p.) *Autor: Kaarel Hänni.*

Lahendus 1. Ilmselt viskab Oleg kaugeimale, kui ta viskab oma maksimaalse kiirusega v , mis ei sõltu viskesuunast. Olgu viskenurk horisontaalsihi suhtes θ . Kõrguselt h visates saame liikumise vertikaalsest komponendist lennuaja t jaoks järgmise võrrandi:

$$h = \frac{gt^2}{2} - t \sin \theta v.$$

Horisontaalsuunas liikumisest saame viske pikkusest ℓ avaldada aja:

$$t = \frac{\ell}{v \cos \theta}.$$

Asendades selle sisse esimesse võrrandisse, saame

$$h(1 + \cos 2\theta) = \frac{g\ell^2}{v^2} - \ell \sin 2\theta. \quad (1)$$

Fikseerides h , me otsime $\ell = \ell(\theta)$ maksimumi. Maksimumi leidmiseks võtame ülemise võrrandi mõlemast poolest tuletise θ järgi ja kasutame ära, et maksimumis $\frac{d\ell}{d\theta} = 0$, saades

$$\tan 2\theta = \frac{\ell}{h},$$

millest

$$\cos 2\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \ell^2}}, \sin 2\theta = \frac{\ell}{\sqrt{h^2 + \ell^2}}.$$

Asendades need sisse võrrandisse 1, saame

$$\ell = \frac{2v^2}{g} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right).$$

$h = 0$ juhust saame

$$L = \frac{v^2}{g}.$$

Asendades selle sisse avaldisse ℓ jaoks, saame

$$\ell = L \sqrt{1 + 2 \frac{h}{L}}.$$

Seega peab nõlva kõrgusel $y = h$ olev punkt olema keskjoonest kaugusel $L\sqrt{1 + 2\frac{h}{L}}$. Seega keskjoone suhtes on nõlva võrrand

$$x = L\sqrt{1 + 2\frac{y}{L}}.$$

Nihutades x -koordinaadi 0-punkti väljaku otsajoone juurde, saame

$$x = L \left(\sqrt{1 + 2\frac{y}{L}} - 1 \right).$$

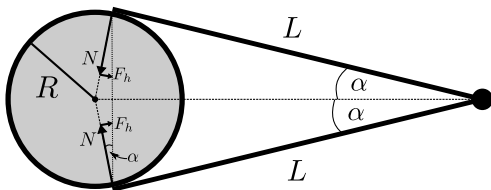
Lahendus 2. Lahenduse autor: Jaan Kalda.

Vaatleme suvalist viskamispunkti nõlval ja kasutame seda $\xi - \eta$ koordinaadistiku nullpunktina. Teatavasti on punktist $(0; 0)$ kiirusega v visates tabatava ruumipiirkonna piirjoon $\eta = \frac{v^2}{2g} - \frac{g\xi^2}{2v^2}$. See on parabool, mille tipp on kõrgusel $\frac{v^2}{2g}$ viskepunkti kohal. On ilmne, et väljaku keskpunkt lebab sellel joonel. Peegeldame seda parabooli horisontaaltasandi suhtes ja nihutame nii, et uue parabooli tipp oleks $\frac{v^2}{2g}$ sügavusel väljaku keskpunkti all: $y = -\frac{v^2}{2g} + \frac{gx^2}{2v^2}$, kus $x - y$ koordinaadistiku nullpunkt on väljaku keskpunkt. Sümmeetria tõttu lebab viskamispunkt sellel uuel kõveral. Uue parabooli kuju ei sõltu viskamispunkti asukohast, seega asuvad kõik viskamispunktid sellel paraboolil.

Soovi korral võime valemi esitada kasutades väljaku poolpikkust $L = v^2/g$: $y = -\frac{L}{2} + \frac{x^2}{2L}$. Samuti võime nullpunkti nihutada väljaku serva, $y = x'(x' - 2L)/2L$.

7. (PULGAD) (12 p.) Autor: Richard Luhtaru.

a) Olgu silindrile mõjuv normaaljõud kummaski punktis N (puutujaga risti) ning hõõrdejõud F_h (puutujaga paralleelne). Olgu nurk pulkade vahel 2α .



Jõudude tasakaalust saame, et puutepunktides mõjuvad resultantjõud $\vec{N} + \vec{F}_h$ peavad olema paralleelsed ja vastassuunalised, seega sümmeetria tõttu peab $\vec{N} + \vec{F}_h$ olema sümmeetriateljega risti.

Kuna puutuja on raadiusega risti, on lihtne näidata, et nurk $\vec{N}$ ja puutepunkte ühendava sirge vahel on α , seega $\tan \alpha = \frac{F_h}{N}$. Piirjuhul, kus μ on minimaalne,

$F_h = \mu N$ ja seega

$$\tan \alpha = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

Teisalt $\tan \alpha = \frac{R}{L}$, seega

$$\mu_{\min} = \frac{R}{L}$$

b) Nagu eelmises osas näidatud, siis hõõrdejõu lauaga paralleelne komponent $F_{h,r} = N \tan \alpha = \frac{R}{L} \cdot N$. Silindrit üles tõstes peab raskusjõu tasakaalustamiseks lisaks mõjuma kummaski punktis hõõrdejõu lauaga risti olev komponent $F_{h,t} = \frac{mg}{2}$, seega kui summaarne hõõrdejõud on F_h , siis

$$F_h^2 = F_{h,r}^2 + F_{h,t}^2 = \frac{R^2}{L^2} N^2 + \frac{m^2 g^2}{4}$$

Piirjuhul $F_h = \mu N$ ja $\tau = NL$, seega

$$\mu^2 N^2 = \frac{R^2}{L^2} N^2 + \frac{m^2 g^2}{4}$$

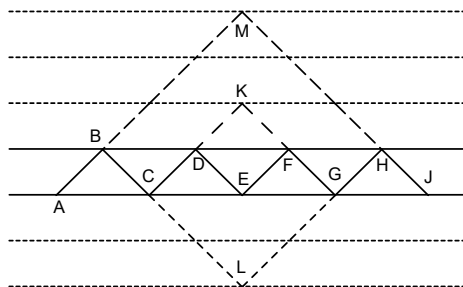
$$\left(\mu^2 - \frac{R^2}{L^2} \right) N^2 = \frac{m^2 g^2}{4}$$

$$N = \frac{mg}{2\sqrt{\mu^2 - \frac{R^2}{L^2}}}$$

$$\tau_{\min} = NL = \frac{mgL}{2\sqrt{\mu^2 - \frac{R^2}{L^2}}} = \frac{mgL^2}{2\sqrt{L^2\mu^2 - R^2}}$$

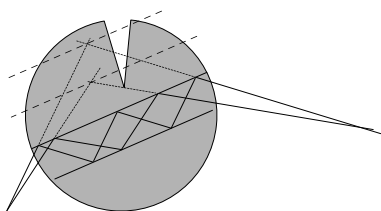
8. (OPTILINE SEADE) (12 p.) Autor: Jaan Kalda.

Kõigepealt vaatleme kiirte käiku kahe paralleelse peegli vahel joonisel 1. Kui peegeldame sik-sakilisest kiirest jupi DEF ülemises peeglis, saame jupi DKF , mis koos lõikudega CD ning FG moodustab juba vähemate sik-sakkidega jupi CKG . Peegeldades juppi CKG alumises peeglis saame jupi CLG ning korrates peegeldamist veel ühe korra saame tervest sik-sakilisest teekonnast $ABCDEFGHJ$ teekonna AMJ , mida võib vaadelda kui kiire AB peegeldust alumise peegli kujutise-kujutise-kujutises. Niisiis, kui joonistame peeglite kujutised, kujutise-kujutised jne, näeme, et sisenevad kiired justkui peegelduksid peeglite kujutises või kujutise-kujutises või kujutise-kujutise-kujutises jne. Algsel joonisel toodud kiirte põhjal saame taastada kaks sellist kujutist,

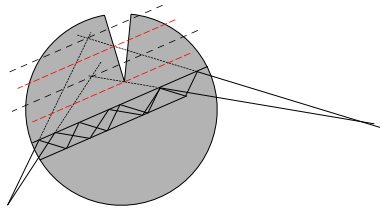


Joonis 1

kujutise-kujutist või kujutise-kujutise-kujutist või jne. N-järku kujutiste seeria moodustab paralleelsete sirgete rivi; tegelikud peeglid peavad olema ühed neist. Kui me joonistame sisendkiiri väljundkiirteks peegeldavate sirgetega (mis on leitavad kiirte pikenduste lõikepunkte läbivate nurgapoolitajate ristsirgetena) paralleelsete ja võrdsetel vahekaugustel asuvate sirgete rivi, siis peavad tegelikud peeglid asuma kahel naabersirgel.



Joonis 2.



Joonis 3.

Joonisel 2 on näha, et lihtsaimal juhul välistab sisselõige peeglite asukoha kõigis peale kahe alumise (veel madalamad asukohad pole võimalikud seetõttu, et sisendkiired ei saa nende vahele siseneda). Põhimõtteliselt on võimalik ka joonisel 3 toodud variant.

9. (ÕHUPALLID) (12 p.) Autor: Taavet Kalda.

Õhupallide raadiuste erinevus on põhjustatud õhupalli kasutatavate materjalide erinevusest. Gaasi rõhku tasakaalustab õhupallide materjali venivusest tulenev pinge. Jõudude tasakaalu arvutamiseks vaatleme õhupalli ristlõiget mis jagab õhupalli kaheks võrdseks pooleks. Kuna mõlemad pooled on tasakaalus, peab õhu avaldatud rõhumisjõud ühele õhupalli poolele tasakaalustama õhupalli sisemised jõud. Olgu õhupalli raadius r , ruumala V , materjali paksus δr , Youngi moodul E , õhu rõhk õhupalli sees p ning materjali pinge σ . Siis

jõudude tasakaal esitub kujul

$$\pi r^2 p = 2\pi r \delta r \sigma,$$

kus me eeldasime et $r \gg \delta r$. Õhupalli deformatsioon on ligikaudu $\epsilon = r/r_0$, kus r_0 on õhupalli esialgne karakterne lineaarmõõde. Seega, $\sigma = Er/r_0$. Lisaks kehtib õhupalli materjali massi (ehk ruumala) jäävus. Teisisõnu, $r^2 \delta r = \alpha$, kus α on konstant. Kokkuvõttes saame, et

$$p = \frac{1}{\pi r^2} \frac{2\pi r^2 \delta r E}{r_0} = \frac{2\alpha E}{r_0} \frac{1}{r^2} = k/r^2, \quad (2)$$

kus $k = 2\alpha E/r_0$ on õhupallile omane konstant. Ideaalse gaasi olekuvõrrandist saame

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{4\pi}{3RT} p r^3 = \frac{4\pi k}{3RT} r.$$

Või siis

$$n = Akr,$$

kus A on kõikidele õhupallidele ühine konstant. Niisiis, kuna mõlemas õhupallis on sama palju õhku, siis

$$k_1 r_1 = k_2 r_2. \quad (3)$$

Edasi, ühendades õhupallid toruga, hakkab õhk suurema rõhuga õhupallist voolama teise õhupalli. Samas paneme tähele, et õhupalli rõhk on pöördvõrdeline raadiuse ruuduga. See tähendab, et mida väiksemaks õhupall muutub, seda kiiremini see tühjenema hakkab, sest õhurõhk aina suureneb. Seega tühjeneb esialgselt suurema rõhuga õhupall täielikult. Ülesande eelduste kohaselt ei pea tühjeneva õhupalli deformatsioonivaba mõõtmetega arvestama.

Kombineerides võrrandid (2) ja (3) näeme, et

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{k_1}{k_2} \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}.$$

Kuna $r_1 > r_2$, siis teine õhupall hakkab kiiremini tühjenema ning seega, $R_2 = 0$. Esimeses õhupallis on $2n$ molekuli, st

$$2n = Ak_1 R_1 = \frac{n}{r_1} R_2.$$

Seega,

$$R_1 = 2r_1.$$

10. (RUUT) (14 p.) Autor: Kaur Aare Saar.

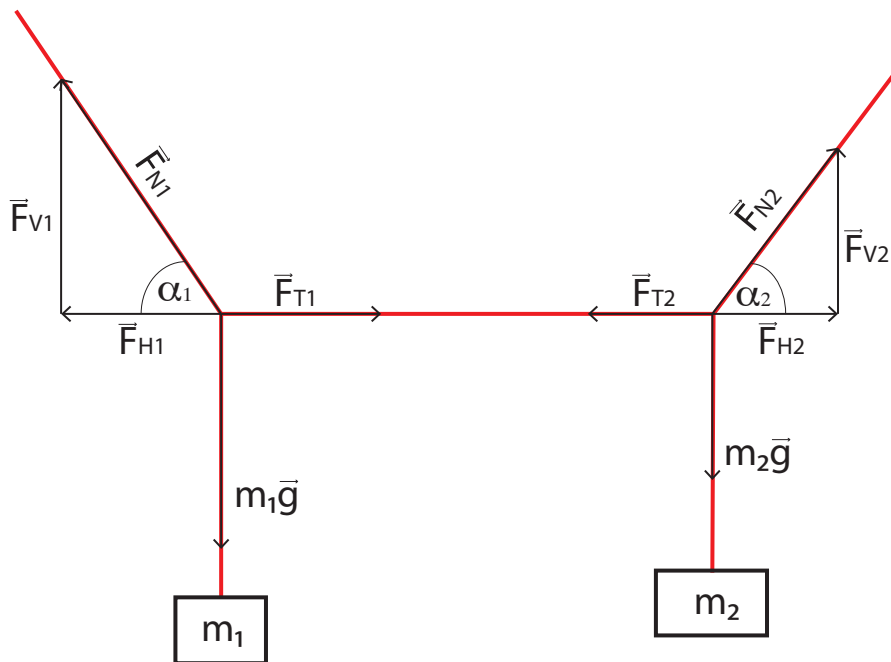
Olgu M ja N vastavalt AB ja CD keskpunktid. Superpositsioneerime ruudu, kus pinge on rakendatud A ja C vahele, ruuduga, kus pinge on rakendatud B ja D vahele. Nüüd sümmeetria tõttu telge MN ei läbi vool ehk takistus A ja D vahel ristkülikus $AMND$ on samuti R . Peegeldame MN üle AD . Saame ruudu $M'MNN'$, külgede keskpunktidega A ja D . A ja D vaheline takistus sellises ruudus on kaks korda väiksem ehk $R/2$.

E1. (MASSIDE SUHE) (14 p.) Autor: Eero Uustalu.

Niidiga saab avaldada vaid tõmbavat jõudu ja see ühtib niidi suunaga. Newtoni I seadus väidab, et paigal saab keha olla vaid kui talle mõjuvate jõudude summa on null.

Teeme niidi sisse mingi vahega kaks aasa ja riputame koormised nende külge. Seejärel tõstame koormised niitipidi üles hoides niidi otsi laiali selliselt, et koormisi ühendav niidilõik on horisontaalne.

Teeme joonise:



Koormiste raskusjõud on vastavalt $m_1 \vec{g}$ ja $m_2 \vec{g}$

jõud vastavates niidilõikudes $\vec{F}_{N1}$ ja $\vec{F}_{T1}$ ning $\vec{F}_{N2}$ ja $\vec{F}_{T2}$
 kus Newtoni I seadusest tulenevalt :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{T1} &= -\vec{F}_{T2} \\ \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{T1} + m_1\vec{g} &= 0 \\ \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{T2} + m_2\vec{g} &= 0\end{aligned}$$

siit tulenevalt on ka

$$\begin{aligned}\vec{F}_{T1} &= -\vec{F}_{H1} \\ \vec{F}_{T2} &= -\vec{F}_{H2} \\ \vec{F}_{V1} &= -m_1\vec{g} \\ \vec{F}_{V2} &= -m_2\vec{g}\end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned}\frac{m_1}{m_2} &= \frac{F_{V1}}{F_{V2}} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \\ \frac{m_{\text{kaarjas metallist viht}}}{m_{\text{polt}}} &= 1,59\end{aligned}$$

E2. (*MUST KAST*) (14 p.) Autor: Jaan Kalda.

Märkus: tegelikult poleks traati vaja, piisaks kuuest mõõtmisest ja saaks kuue võrrandi ja kuue tundmatuga süsteemi (eeldades, et on kuus takistit, millest kaks omavad lõpmata suurt väärtust), aga selle lahendamine on tüütu.

Paneme tähele, et kui mõõta klemmide A ja B vahelist takistust ning lühistada klemmid B ja C , B ja D või C ja D vahel, siis oommeetri näit R_1 ei muutu. See on võimalik vaid siis, kui B , C ja D on kolmnurkühenduses, A ja B vahel on takistus $R_{AB} = R_1$ ja ülejäänud takistused puuduvad. Mõõdame nüüd B ja C vahelise takistuse r_1 lühistades klemmid B ja D :

$$R_{BC}^{-1} + R_{CD}^{-1} = r_1^{-1};$$

analoogselt

$$R_{CD}^{-1} + R_{DB}^{-1} = r_2^{-1}$$

ja

$$R_{DB}^{-1} + R_{BC}^{-1} = r_3^{-1}.$$

Summeerides leiame

$$R_{BC}^{-1} + R_{CD}^{-1} + R_{DB}^{-1} = \frac{1}{2}(r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1}),$$

millest

$$R_{BC}^{-1} = \frac{1}{2}(r_1^{-1} - r_2^{-1} + r_3^{-1}),$$

$$R_{CD}^{-1} = \frac{1}{2}(r_1^{-1} + r_2^{-1} - r_3^{-1}),$$

$$R_{DB}^{-1} = \frac{1}{2}(-r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1}).$$